6. Trasformazioni in $\mathbf{R}^3$.

In questo paragrafo studiamo alcune trasformazioni geometriche dello spazio $\mathbf{R}^3$. Per trasformazioni si intendono sempre delle applicazioni bigettive $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$.

Definizione. Sia $\mathbf{p}$ un vettore di $\mathbf{R}^3$. La *traslazione* $T_{\mathbf{p}}$ di passo $\mathbf{p}$ è l'applicazione $T_{\mathbf{p}} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \\ x_3 + p_3 \end{pmatrix}.$$

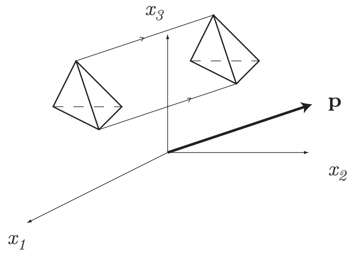

Fig.17. La traslazione di passo $\mathbf{p}$.

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 6.1.
(i) *Siano* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^3$. *Allora* $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}$. *In particolare, la composizione di due traslazioni è una traslazione.*
(ii) *La traslazione* $T_{\mathbf{0}}$ *è l'applicazione identica.*
(iii) *La traslazione* $T_{-\mathbf{p}}$ *è l'inversa di* $T_{\mathbf{p}}$, *ossia* $T_{\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{p}} = (T_{-\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{p}}) = T_{\mathbf{0}}$ *è l'applicazione identica.*

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella della Prop.3.1 ed è lasciata al lettore.

Un'altra famiglia di trasformazioni di $\mathbf{R}^3$ sono le *dilatazioni.*

Definizione. Siano $\lambda, \mu, \rho \in \mathbf{R}$, $\lambda, \mu, \rho > 0$. La dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ di $\mathbf{R}^3$ è l'applicazione $D_{\lambda,\mu,\rho} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$D_{\lambda,\mu,\rho} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \\ \rho x_3 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda,\mu,\rho} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda = \mu = \rho > 0$, la dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ è semplicemente un "ingrandimento" o *omotetia* di fattore $\lambda = \mu = \rho$. In generale, $D_{\lambda,\mu,\rho}$ è un ingrandimento di fattore λ nella direzione dell'asse delle x_1, di fattore μ nella direzione dell'asse delle x_2 e di fattore ρ nella direzione dell'asse delle x_3.

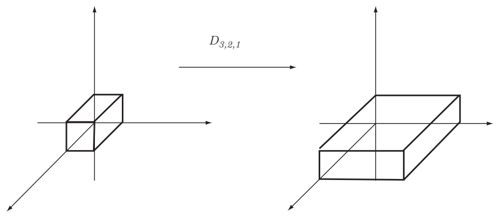

Fig.18. La dilatazione $D_{3,2,1}$.

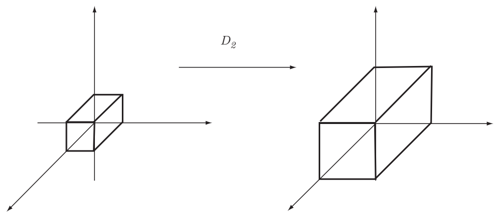

Fig.19. L'omotetia D_2.

Introduciamo adesso le *rotazioni* e le riflessioni in $\mathbf{R}^3$. La teoria è un po' più complicata di quella in $\mathbf{R}^2$. Cominciamo con le rotazioni e le riflessioni in forma standard e poi trattiamo il caso generale.

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $R_\varphi\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ associa il vettore $\mathbf{x}$ ruotato di un angolo φ intorno al vettore $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $\varphi > 0$, la rotazione indotta sul piano (x_2, x_3) va intesa in senso antiorario (vedi Cap. 3). Se $\varphi < 0$, la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso "orario".

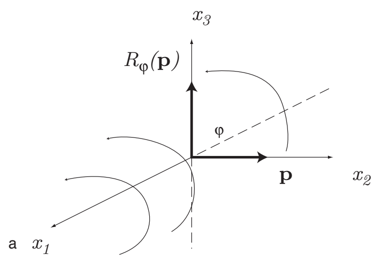

Fig.20. La rotazione R_φ.

Teorema 6.2. *Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ e sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Le coordinate del punto $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ sono date da*

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \cos(\varphi)x_2 - \operatorname{sen}(\varphi)x_3, \\ y_3 &= \operatorname{sen}(\varphi)x_2 + \cos(\varphi)x_3. \end{aligned}$$

In notazione matriciale

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Questa formula segue dalla formula del Teorema 3.2 per la rotazione R_φ in $\mathbf{R}^2$ di centro $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$ e angolo φ.

Per esempio, la rotazione $R_{\pi/4}$ in $\mathbf{R}^3$ è data da

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \end{pmatrix}.$$

Osservazione. Come ottenere le formule della rotazione di un angolo φ intorno ad una retta arbitraria che passa per $\mathbf{0}$? Inanzitutto, notiamo che il problema non è ben posto se la retta non è orientata: non è chiaro infatti in quale direzione si deve fare la rotazione. Se la retta è orientata, per fissare il *senso* della rotazione parleremo di *rotazione di un angolo φ intorno ad un vettore* $\mathbf{v}$ con direzione e verso uguali a quelli della retta. Un metodo naturale per ottenere le formule di una rotazione $R_{\varphi,\mathbf{v}}$ di angolo φ intorno ad una vettore $\mathbf{v}$ diverso da $\mathbf{e}_1$, è il seguente.

Sia $\mathbf{e}'_1$ un vettore parallelo a $\mathbf{v}$ e *di lunghezza* 1. Scegliamo poi due vettori $\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in \mathbf{R}^3$ di lunghezza 1, in modo che $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ siano ortogonali fra loro ed orientati positivamente. I vettori $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ formano in particolare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$. I vettori $\mathbf{e}'_2$ e $\mathbf{e}'_3$ con queste proprietà possono essere scelti in infiniti modi. Siano $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ le coordinate di un generico vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, rispetto a questa base. Per il teorema 6.2, rispetto a questa base, la rotazione è data da

$$R_{\varphi,\mathbf{v}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cos(\varphi)x'_2 - \operatorname{sen}(\varphi)x'_3 \\ \operatorname{sen}(\varphi)x'_2 + \cos(\varphi)x'_3 \end{pmatrix} = A'_\varphi \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

dove

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

è la matrice rappresentativa corrispondente. Sia M la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$; le colonne di M sono i vettori della base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ espressi nella base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. La matrice rappresentativa $A_{\varphi,\mathbf{v}}$ di $R_{\varphi,\mathbf{v}}$ rispetto alla base canonica è data dunque da

$$A_{\varphi,\mathbf{v}} = M A'_{\varphi,\mathbf{v}} M^{-1}.$$

Esempio 6.3. Calcoliamo le formule della rotazione di un angolo $\pi/4$ intorno al vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale per $\mathbf{R}^3$, orientata positivamente. La matrice rappresentativa della rotazione $R_{\pi/4}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ è data da

$$A_{\pi/4}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice M del cambiamento di base $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\} \to \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è data da

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice rappresentativa $A_{\pi/4}$ della rotazione rispetto alla base canonica è quindi data da

$$A_{\pi/4} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Osservazione. Come calcolare le formule della rotazione R di un angolo φ rispetto ad una retta orientata l che non passa per l'origine? La strategia è di traslare la retta l nell'origine, di ruotare di un angolo φ intorno ad un vettore $\mathbf{v}$ con direzione e verso uguali ad l, e di ritraslare infine la retta "dov'era".

Esempio 6.7. Calcoliamo ad esempio la rotazione di un angolo $\pi/3$ rispetto alla retta l di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Cominciamo con una traslazione che porta l in una retta per l'origine $\mathbf{0}$. Per esempio la traslazione $T_{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ di passo $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ porta l nella retta m, parallela ad l e passante per l'origine. La retta m ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

e coincide con l'asse delle x_2. Fissiamo il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ paralello ad m. Rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$, orientata positivamente, la matrice rappresentativa della rotazione $R_{\pi/3}$ è data da

$$R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa della rotazione intorno a $\mathbf{v}$ risulta

$$R_{\pi/3,\mathbf{v}} = MR_{\pi/3}M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad l sono quindi

$$R = T_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)} R_{\pi/3,\mathbf{v}} T_{\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)}$$

ossia

$$R\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\\x_3\end{pmatrix}.$$

Supponiamo adesso che la retta l, e quindi la retta m, abbia l'orientazione opposta. Il vettore $\mathbf{v}' = -\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ ha la direzione e il verso di m. In questo caso, la base $\mathcal{B}'' = \{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ è ortonormale ed orientata positivamente ed il cambiamento di base da $\mathcal{B}''$ alla base canonica è dato dalla matrice

$$N = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base $\mathcal{B}''$ la matrice rappresentativa della rotazione è ancora $R_{\pi/3}$, ma rispetto alla base canonica troviamo adesso la matrice

$$R_{\pi/3,\mathbf{v}'} = NR_{\pi/3}N^{-1} = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad l risultano quindi

$$R'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\\x_3\end{pmatrix}.$$

Definizione. Sia $S : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano di equazione $x_3 = 0$. Abbiamo

$$S\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

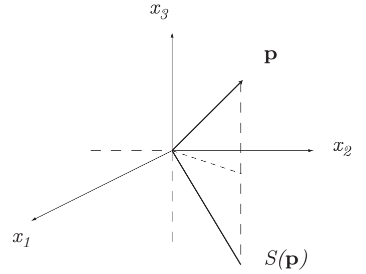

Fig.21. La riflessione S rispetto al piano $x_3 = 0$.

La riflessione rispetto ad una retta l è un particolare tipo di rotazione, precisamente la rotazione di un angolo di 180 gradi intorno alla retta stessa. In questo caso, il risultato non dipende dall'orientazione di l.
Definizione. La riflessione U rispetto all'origine $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$ è data dalla formula

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

oppure, in notazione matriciale, da

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

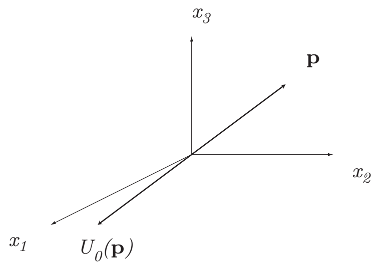

Fig.22. La riflessione U rispetto all'origine $\mathbf{0}$.

Esempio. (*riflessione rispetto ad un piano arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula per la riflessione S_π rispetto ad un arbitrario piano π mediante un esempio esplicito. Sia π il piano di equazione $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$. Sia $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ un punto arbitrario. La retta l che passa per $\mathbf{p}$ ed è perpendicolare a π è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

L'intersezione $l \cap \pi$ è un punto $\mathbf{q}$ che corrisponde al valore del parametro

$$t = t_0 = \frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9}.$$

Siccome $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = 0$, il punto $S_\pi(\mathbf{p})$, simmetrico di $\mathbf{p}$ rispetto a π, corrisponde a $t = 2t_0$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} S_\pi \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2t_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2\frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8/9 \\ -16/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

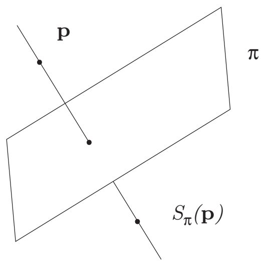

Fig.23. La riflessione S_π rispetto al piano π.

Osservazione In generale, la riflessione S_π rispetto ad un piano π non è un'applicazione lineare, ma è una applicazione lineare seguita da una traslazione. La riflessione S_π è lineare se e soltanto se π passa per l'origine $\mathbf{0}$.

Esempio. (*riflessione rispetto ad un punto arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula della riflessione rispetto ad un punto arbitrario, tramite un esempio esplicito. Sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ un punto fissato e sia $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ un punto arbitrario. Sia $U_\mathbf{q}(\mathbf{p})$ il punto simmetrico di $\mathbf{p}$ rispetto a $\mathbf{q}$. Poiché il centro di riflessione $\mathbf{q}$ è il punto medio fra $\mathbf{p}$ e $U_\mathbf{q}(\mathbf{p})$ si ha che $\mathbf{q} = 1/2(\mathbf{p} + U_\mathbf{q}(\mathbf{p})$. Di conseguenza

$$U_\mathbf{q}(\mathbf{p}) = 2\mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 - p_1 \\ -2 - p_2 \\ 4 - p_3 \end{pmatrix}.$$

Osservazione. Tutte le trasformazioni lineari di $\mathbf{R}^3$ mandano rette in rette e piani in piani. Lo stesso vale per le traslazioni e dunque per la composizione di trasformazioni lineari e traslazioni. Se M è la matrice rappresentativa di una trasformazione lineare di $\mathbf{R}^3$ ed r è una retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R},$$

la retta immagine di R tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se π è un piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R},$$

il piano immagine di π tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v} + sM\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se $T_\mathbf{q}$ è luna traslazione di passo $\mathbf{q}$ in $\mathbf{R}^3$, l'immagine di r tramite $T_\mathbf{q}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R};$$

l'immagine di π tramite $T_\mathbf{q}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Osservazione. Per concludere osserviamo che, in generale, una trasformazione lineare f di $\mathbf{R}^3$ preserva l'orientazione se e soltanto se $\det(f) > 0$. Le rotazioni $R_{\varphi,\mathbf{v}}$ preservano l'orientazione della base canonica di $\mathbf{R}^3$ e le loro matrici rappresentative hanno sempre determinante uguale a 1. Le riflessioni S ed U invece cambiano l'orientazione della base canonica di $\mathbf{R}^3$ e le loro matrici rappresentative hanno determinante uguale a -1. Le dilatazioni $D_{\lambda,\mu,\rho}$ preservano l'orientazione in quanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Or}(D_{\lambda,\mu,\rho}(\mathbf{v}), D_{\lambda,\mu,\rho}(\mathbf{w}), D_{\lambda,\mu,\rho}(\mathbf{u})) &= \mathrm{Or}\left(\begin{pmatrix}\lambda v_1\\ \mu v_2\\ \rho v_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda w_1\\ \mu w_2\\ \rho w_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda u_1\\ \mu u_2\\ \rho u_3\end{pmatrix}\right),\\ &= \lambda\mu\rho\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Esercizi.

(6.A) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}})\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}})\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

(6.B) Sia $D_{2,5,3}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{\lambda,\mu,\rho} \circ D_{2,5,3}$ sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{2,5,3} \circ D_{\lambda,\mu,\rho}$ sia l'applicazione identica.

(6.C) Sia C il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}.$$

(i) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?

(ii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione R_{π} intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?

(iii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$ intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?

(6.D) Sia C il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $\mathbf{e}_3$.

(ii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $\mathbf{e}_1$.

(iii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $-\mathbf{e}_1$.

(iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?

(6.E) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.

(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ di un angolo $\pi/2$ intorno a $\mathbf{v}$.

(ii) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ intorno a $\mathbf{v}$.

(iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ a l.

(iv) Sia π il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ a π.

(6.F) Sia π il piano di equazione $x_1 + 2x_2 = 0$.

(i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a π.

(ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(6.G) Sia C il cubo dell'Eserc.6.C. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto

(i) al piano (x_1, x_2).

(ii) al piano (x_2, x_3).

(iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.

(6.H) Sia C il cubo dell'Eserc.6.D. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto

(i) al piano (x_1, x_2).

(ii) al piano (x_2, x_3).

(iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.

(iv) Trovare tutte le riflessioni S_π che mandano C in se stesso.

(6.I) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare la formula per la riflessione $U_\mathbf{p}$ rispetto al punto $\mathbf{p}$.

(ii) Calcolare la formula per la riflessione $U_\mathbf{q}$ rispetto al punto $\mathbf{q}$.

(iii) Calcolare le formule per la trasformazione $U_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{q}$ e per $U_\mathbf{q} \circ U_\mathbf{p}$.

(iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni $U_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{q}$ e $U_\mathbf{q} \circ U_\mathbf{p}$?

(6.J) Sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R}$$

e sia π' il piano di equazione $x_3 = 0$.

(i) Trovare le formule della riflessione S_π rispetto a π.

(ii) Calcolare le formule della riflessione $S_{\pi'}$ rispetto a π'.

(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S_\pi \circ S_{\pi'}.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S_{\pi'} \circ S_\pi.$$

(6.K) Dimostrare che una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ conserva le direzioni delle rette e dei piani se e solo se $\lambda = \mu = \rho$.