

3. Trasformazioni geometriche di \mathbf{R}^2 .

In questo paragrafo studiamo alcune trasformazioni geometriche del piano \mathbf{R}^2 . Per trasformazioni si intendono sempre delle applicazioni bigettive $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Le trasformazioni del piano si possono *comporre* tra loro: se f e g sono due applicazioni bigettive da \mathbf{R}^2 in \mathbf{R}^2 , allora la composizione $f \circ g$, definita da

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})),$$

è ancora un'applicazione bigettiva da \mathbf{R}^2 in \mathbf{R}^2 . Nota bene che $f \circ g$ si legge “ f composto g ”, a indicare che prima si applica g al vettore \mathbf{x} e poi si applica f al vettore $g(\mathbf{x})$. In generale, $f \circ g$ è diversa dall'applicazione $g \circ f$.

La composizione fra applicazioni gode della *proprietà associativa*:

$$(f \circ (g \circ h))(\mathbf{x}) = f(g(h(\mathbf{x}))) = ((f \circ g) \circ h)(\mathbf{x}).$$

Definizione. Sia \mathbf{p} un vettore di \mathbf{R}^2 . La *traslazione* $T_{\mathbf{p}}$ di passo \mathbf{p} è l'applicazione $T_{\mathbf{p}} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}.$$

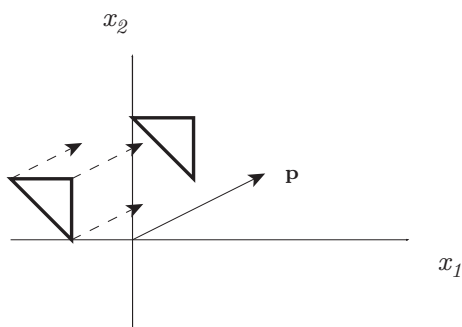


Fig.23 La traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 3.1.

- (i) Siano $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$. Allora $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}$. In particolare, la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione.
- (ii) La traslazione $T_{\mathbf{0}}$ è l'applicazione identica.
- (iii) La traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ è l'inversa di $T_{\mathbf{p}}$.

Dimostrazione. (i) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, vale

$$T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = (T_{\mathbf{p}}(T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))) = T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} + \mathbf{q}) = \mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\mathbf{x}).$$

D'altra parte, per la commutatività della somma fra vettori, vale anche

$$\mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{x} + \mathbf{q} + \mathbf{p} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}).$$

(ii) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, si ha che

$$T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x},$$

ossia $T_{\mathbf{0}}$ è proprio l'applicazione identità di \mathbf{R}^2 .

(iii) Dal punto (i) segue che

$$T_{\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{-\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

cioè $T_{\mathbf{p}}$ e $T_{-\mathbf{p}}$ sono una l'inversa dell'altra.

Un'altra famiglia di trasformazioni di \mathbf{R}^2 sono le *dilatazioni*.

Definizione. Siano $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda, \mu > 0$. La dilatazione $D_{\lambda, \mu}$ di \mathbf{R}^2 è l'applicazione $D_{\lambda, \mu} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$D_{\lambda, \mu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda, \mu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

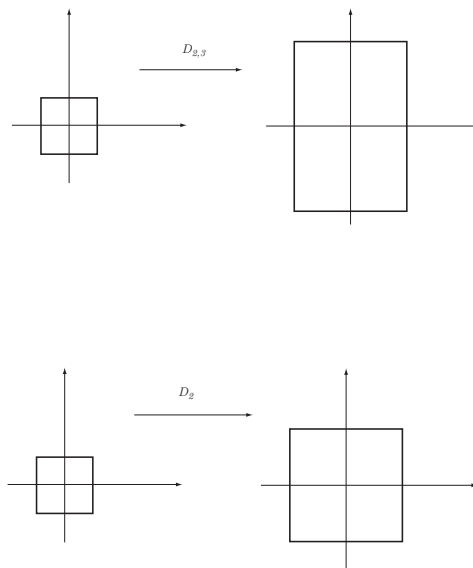


Fig.24 La dilatazione $D_{2,3}$ e l'omotetia D_2 .

Se $\lambda = \mu > 0$, la dilatazione $D_{\lambda, \mu}$ è semplicemente un “ingrandimento” di fattore $\lambda = \mu$. Se λ e μ sono numeri positivi distinti, $D_{\lambda, \mu}$ è un ingrandimento di fattore λ nella direzione dell’asse delle ascisse e di fattore μ nella direzione dell’asse delle ordinate.

Introduciamo adesso la famiglia delle *rotazioni*.

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $R_{\varphi} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ associa il vettore ottenuto da \mathbf{x} dopo la rotazione di un angolo φ intorno all’origine. Se $\varphi > 0$, la rotazione va intesa in senso “antiorario”. Se $\varphi < 0$, la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso “orario”.

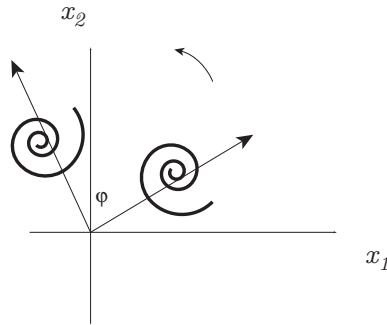


Fig.25 La rotazione R_φ .

Teorema 3.2. Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ e sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Le coordinate del punto $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ sono date da

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos \varphi x_1 - \operatorname{sen} \varphi x_2, \\ y_2 &= \operatorname{sen} \varphi x_1 + \cos \varphi x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia α l'angolo fra il vettore \mathbf{x} e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos \alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

Il vettore $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ forma un angolo $\varphi + \alpha$ con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos \varphi \cos \alpha - \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos \varphi \operatorname{sen} \alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha. \end{aligned}$$

La sostituzione $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha$ e $x_2 = \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \alpha$ conclude la dimostrazione.

Esempio. Per esempio, la rotazione $R_{\pi/4}$ di centro $\mathbf{0}$ e di angolo $\varphi = \pi/4$ è l'applicazione

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Le rotazioni godono delle seguenti proprietà.

Proposizione 3.3.

(i) La composizione di due rotazioni R_φ e R_ψ intorno all'origine è una rotazione di angolo $\varphi + \psi$:

$$R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi} = R_\psi \circ R_\varphi.$$

(ii) La rotazione di un angolo $\varphi = 0$ è l'applicazione identica, ossia $R_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$.

(iii) La rotazione inversa di R_φ è $R_{-\varphi}$.

Dimostrazione. Tutte queste proprietà sono geometricamente evidenti, ma si possono anche ottenere dalle formule del Teorema 3.2.

Problema. Come ottenere le formule di una rotazione $R_{\varphi, \mathbf{p}}$ di angolo φ intorno ad un punto \mathbf{p} diverso dall'origine? Un modo di procedere è il seguente: prima si fa una traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ di passo $-\mathbf{p}$, che porti il punto \mathbf{p} in $\mathbf{0}$; poi si fa una rotazione R_φ intorno a $\mathbf{0}$ e poi si fa una traslazione $T_{\mathbf{p}}$ che riporti $\mathbf{0}$ in \mathbf{p} :

$$R_{\varphi, \mathbf{p}} = T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}.$$

In coordinate

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) &= T_{\mathbf{p}} \left(R_\varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix} \right) \right) = T_{\mathbf{p}} \left(\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esempio 3.4. Calcoliamo, ad esempio, le formule della rotazione $R_{\varphi, \mathbf{p}}$ di un angolo φ attorno al punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} R_{\varphi, \mathbf{p}}(\mathbf{x}) &= T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \\ &= T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \cos \varphi (x_1 - 5) - \operatorname{sen} \varphi (x_2 - 4) \\ \operatorname{sen} \varphi (x_1 - 5) + \cos \varphi (x_2 - 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi (x_1 - 5) - \operatorname{sen} \varphi (x_2 - 4) + 5 \\ \operatorname{sen} \varphi (x_1 - 5) + \cos \varphi (x_2 - 4) + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Introduciamo infine le *riflessioni*.

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $S_\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ associa il vettore ottenuto da \mathbf{x} dopo la riflessione rispetto alla retta che passa per $\mathbf{0}$ e forma un angolo φ con l'asse delle ascisse.

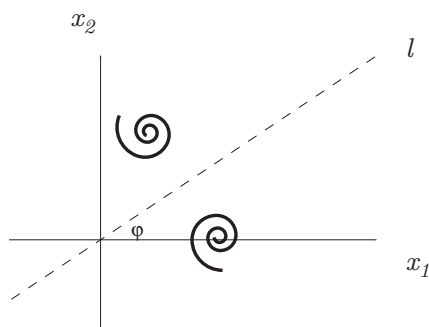


Fig.26 La riflessione S_φ .

Teorema 3.5. Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ e sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Le coordinate del punto $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$ sono date da

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos(2\varphi)x_1 + \sin(2\varphi)x_2, \\ y_2 &= \sin(2\varphi)x_1 - \cos(2\varphi)x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$S_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia α l'angolo fra il vettore \mathbf{x} e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos \alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \sin \alpha. \end{aligned}$$

Si vede dalla Fig.28 che il vettore $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$ forma un angolo $2\varphi - \alpha$ con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi - \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi) \cos \alpha + \|\mathbf{x}\| \sin(2\varphi) \sin \alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \sin(2\varphi - \alpha) = -\|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi) \sin \alpha + \|\mathbf{x}\| \sin(2\varphi) \cos \alpha. \end{aligned}$$

La sostituzione $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha$ e $x_2 = \|\mathbf{x}\| \sin \alpha$ conclude la dimostrazione.

Esempio. Per esempio, la retta l data da $x_1 = x_2$ forma un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle ascisse. La riflessione rispetto ad l è l'applicazione $S_{\pi/4}$ data dalle formule

$$S_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.6.

- (i) La composizione $S_\varphi \circ S_\varphi$ è l'applicazione identica.
- (ii) La composizione $S_\varphi \circ S_\psi$ di due riflessioni rispetto a rette distinte passanti per $\mathbf{0}$ (con $\varphi \neq \psi$) è una rotazione di angolo $2(\varphi - \psi)$.

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\begin{aligned} (S_\varphi \circ S_\psi)(\mathbf{x}) &= \left(\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\psi) & \sin(2\psi) \\ \sin(2\psi) & -\cos(2\psi) \end{pmatrix} \right) (\mathbf{x}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \cos(2\psi) + \sin(2\varphi) \sin(2\psi) & \cos(2\varphi) \sin(2\psi) - \sin(2\varphi) \cos(2\psi) \\ \sin(2\varphi) \cos(2\psi) - \cos(2\varphi) \sin(2\psi) & \sin(2\varphi) \sin(2\psi) + \cos(2\varphi) \cos(2\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\varphi - \psi)) & -\sin(2(\varphi - \psi)) \\ \sin(2(\varphi - \psi)) & \cos(2(\varphi - \psi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= R_{2(\varphi - \psi)}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

In particolare, se $\varphi = \psi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ otteniamo l'applicazione identità.

Osservazione. Dalle formule del teorema precedente si vede anche che, in generale,

$$S_\varphi \circ S_\psi \neq S_\psi \circ S_\varphi.$$

Osservazione. Se $\varphi = 0$, l'applicazione S_0 è una riflessione rispetto all'asse delle ascisse; se $\varphi = \pi/2$, l'applicazione $S_{\pi/2}$ è una riflessione rispetto all'asse delle ordinate.

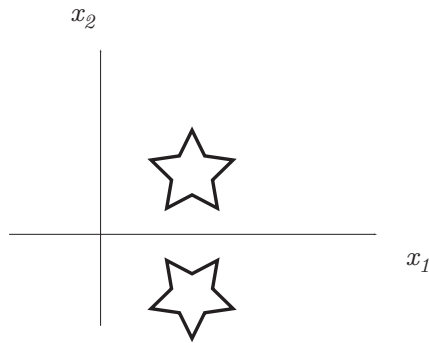


Fig.27 La riflessione rispetto all'asse delle ascisse S_0 .

La composizione delle riflessioni S_0 ed $S_{\pi/2}$ è una rotazione di angolo π , ossia la riflessione rispetto all'origine $\mathbf{0}$.

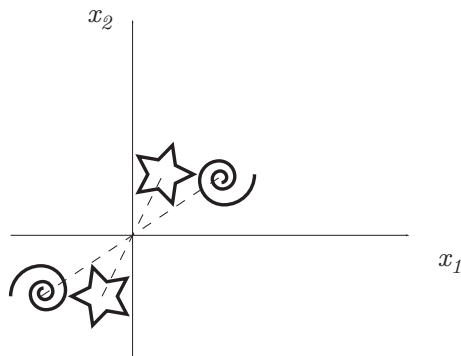


Fig.28 La riflessione rispetto all'origine $R_\pi = S_0 \circ S_{\pi/2}$.

Problema. Come calcolare le formule della riflessione S rispetto ad una retta l che non passa per l'origine? Se la retta l non passa per l'origine, non possiamo usare direttamente le formule del Teorema 3.5, ma possiamo procedere nel seguente modo. Fissiamo un punto arbitrario \mathbf{p} sulla retta l e applichiamo la traslazione $T_{-\mathbf{p}}$. La trasformata della retta l , tramite $T_{-\mathbf{p}}$, è la retta l' , parallela ad l e passante per $\mathbf{0}$; applichiamo adesso la riflessione S_φ rispetto ad l' , ove φ è l'angolo formato da l' con l'asse delle ascisse. Applichiamo infine la traslazione inversa $T_{\mathbf{p}}$, che "riporta la retta l al suo posto". In totale, la riflessione rispetto ad l è data dalla composizione

$$S = T_{\mathbf{p}} \circ S_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}$$

e non dipende dalla scelta di $\mathbf{p} \in l$. In coordinate

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}} \circ S_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) &= T_{\mathbf{p}} \left(S_\varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix} \right) \right) = T_{\mathbf{p}} \left(\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esempio 3.7. Calcoliamo ad esempio la riflessione rispetto alla retta l di equazione $x_1 + 1 = 0$. Il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene ad l e quindi la traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ di passo $-\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ porta l nella retta l' , ad essa parallela e passante per l'origine. l' è data dall'equazione $x_1 = 0$ e forma un angolo uguale a $\pi/2$ con l'asse delle ascisse. La trasformazione cercata è data dunque dalla composizione

$$S = T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

In coordinate S risulta

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}(\mathbf{x}) \\ &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ S_{\pi/2} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Concludiamo questo paragrafo introducendo l'orientazione di una coppia di vettori in \mathbf{R}^2 .

Definizione. L'orientazione $\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ di una coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$ è il segno del determinante

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

In altre parole

$$\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} +1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 > 0; \\ 0 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0; \\ -1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 < 0. \end{cases}$$

Si dice che una coppia di vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} è orientata *positivamente* se $\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$. Geometricamente, ciò accade se, ruotando il vettore \mathbf{v} in senso antiorario fino a sovrapporlo alla retta passante per $\mathbf{0}$ e \mathbf{w} , allora \mathbf{v} ha lo stesso verso di \mathbf{w} (e non quello opposto).

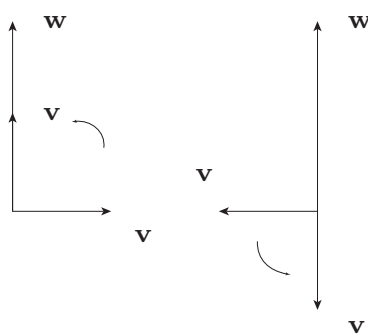


Fig.29 Orientazione.

L'orientazione $\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ *cambia* se cambia l'ordine dei vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} . Si ha infatti che

$$\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\text{Or}(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Siano $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allora si ha che

$$\text{Or}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = +1, \quad \text{Or}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1.$$

Una qualunque rotazione R_φ conserva l'orientazione di ogni coppia di vettori. Si dice anche che le rotazioni conservano l'orientazione del piano. Una riflessione, invece, cambia l'orientazione di ogni coppia di vettori. Una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$, $\lambda, \mu > 0$ conserva sempre l'orientazione:

$$\begin{aligned} \text{Or}(D_{\lambda,\mu}(\mathbf{v}), D_{\lambda,\mu}(\mathbf{w})) &= \text{Or}\left(\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \mu w_2 \end{pmatrix}\right), \\ &= \lambda v_1 \mu w_2 - \lambda w_1 \mu v_2, \\ &= \lambda \mu \text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

In generale, un'applicazione lineare f di \mathbf{R}^2 conserva l'orientazione se e soltanto se $\det(f) > 0$.

Esercizi.

(3.A) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- (i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.
- (ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- (iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- (iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}})\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(3.B) Sia Q il trapezio in \mathbf{R}^2 di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di Q dopo la traslazione $T_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$.
- (ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la dilatazione $D_{2,2}$ data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- (iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la riflessione S_0 data dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- (iv) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione R_π data dalla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3.C) Sia $D_{2,5}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- (i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{2,5}$ sia l'applicazione identica.
- (ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{2,5} \circ D_{\lambda,\mu}$ sia l'applicazione identica.

(3.D) Per quali dilatazioni $D_{\lambda,\mu}$ abbiamo che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu}$ è l'applicazione identica?

(3.E) Sia Q il quadrato in \mathbf{R}^2 di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.
- (ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione R_π .
- (iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$.

(3.F) Sia Q il quadrato in \mathbf{R}^2 di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.
- (ii) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato in se stesso?
- (iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.

(3.G) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti di \mathbf{R}^2 di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- (i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda l'esagono di vertici $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ in se stesso?

(3.H) Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Trovare le formule per la rotazione R di centro \mathbf{p} ed angolo $\pi/2$.
- (ii) Trovare le formule per la rotazione R' di centro \mathbf{p} ed angolo $-\pi/4$.
- (iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando R ad l .

(iv) Sia m la retta di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando R' ad l .

(3.I) Sia l la retta di equazione $x_1 + x_2 = 0$.

- (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto ad l .
- (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(3.J) Sia Q il quadrato dell'Eserc.3.E. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.

(3.K) Sia Q il quadrato dell'Eserc.3.F. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.
- (iv) Trovare tutte le riflessioni S_φ che mandano Q in se stesso.

(3.L) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti dell'Eserc.3.G. Calcolare l'immagine dell'esagono di vertici Q_i dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) la retta di equazione $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$.
- (iv) Trovare tutte le riflessioni S_φ che mandano l'esagono in se stesso.

(3.M) Sia S la riflessione rispetto alla retta l di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.

- (i) Calcolare la tangente dell'angolo φ formato da l con l'asse delle ascisse.

(ii) Calcolare le formule per S .

(3.N) Sia S la riflessione rispetto alla retta l di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.

(i) Calcolare le formule della riflessione S_0 rispetto all'asse delle ascisse.

(ii) Determinare se

$$S = R_{-\varphi} \circ S_0 \circ R_{\varphi}.$$

(Suggerimento: calcolare le formule per R_{φ} e per S).

(3.O) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e sia m la retta di equazione $x_1 = 0$.

(i) Trovare le formule della riflessione S rispetto ad l .

(ii) Calcolare le formule della riflessione S' rispetto ad m .

(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

(3.P) Sia l la retta di equazione $x_1 = 1$ e sia m la retta di equazione $x_2 = 2$.

(i) Calcolare le formule della riflessione S rispetto ad l .

(ii) Calcolare le formule della riflessione S' rispetto ad m .

(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

(iv) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

(3.Q) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare l'orientazione di \mathbf{v} e \mathbf{w} .

(ii) Calcolare l'orientazione di \mathbf{w} e \mathbf{v} .

(iii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Calcolare $\text{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$.

(iv) Sia S_{φ} la riflessione rispetto alla retta passante per $\mathbf{0}$ e formante un angolo φ con l'asse delle ascisse. Calcolare $\text{Or}(S_{\varphi}(\mathbf{v}), S_{\varphi}(\mathbf{w}))$.

(3.R) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Sia $R_{\pi/2}$ la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo $\pi/2$. Calcolare $\text{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w}))$.

(ii) Sia R_{φ} la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo φ . Calcolare $\text{Or}(R_{\varphi}(\mathbf{v}), R_{\varphi}(\mathbf{w}))$.

(3.S) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Siano $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(t)}$ le riflessioni rispetto a delle rette passanti per $\mathbf{0}$. Sia $S = S^{(1)} \circ S^{(2)} \circ \dots \circ S^{(t)}$. Calcolare l'orientazione $\text{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w}))$.