

1. Sia $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ una successione esatta corta di gruppi abeliani. Sia G un gruppo abeliano.

(a) La successione $A \otimes G \rightarrow B \otimes G \rightarrow C \otimes G \rightarrow 0$ è esatta.

(b) Se $B \cong A \oplus C$, allora la successione $0 \rightarrow A \otimes G \rightarrow B \otimes G \rightarrow C \otimes G \rightarrow 0$ è esatta.

2. Sia G un gruppo abeliano.

(a) Verificare che

$$\text{Tor}(\mathbf{Z}_n, G) \cong \ker(G \xrightarrow{n} G).$$

(b) Calcolare $\text{Tor}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m)$.

3. Verificare che $\text{Tor}(A, B) = 0$, se A o B è un gruppo libero.

4. Calcolare i gruppi di omologia degli spazi proiettivi reali $\mathbf{R}P^n$, a coefficienti in \mathbf{Z}_3 e in \mathbf{R} .

5. Calcolare i gruppi di omologia della bottiglia di Klein K , a coefficienti in \mathbf{Z}_2 , in \mathbf{Z}_3 e in \mathbf{R} .