1. Sia X uno spazio topologico, e sia $A \subset X$ un sottospazio non vuoto.
   (a) Se $\widetilde{H}_n(A) = 0$, per ogni n, allora $H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n(X)$, per ogni n (cf. Es.1 del foglio 3);
   (b) Se $\widetilde{H}_n(X) = 0$, per ogni n, allora $H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_{n-1}(A)$, per ogni n.

2. Calcolare i gruppi di omologia $H_k(D^n, A_n)$, dove $A_n = \{x \in D^n \mid \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$.

3. Verificare che $H_k(S^n, D^n_+) \cong H_k(D^n_-, S^{n-1})$, dove D^n_+ e D^n_- sono rispettivamente l'emisfero superiore e l'emisfero inferiore della sfera (equatore incluso).

4. Calcolare i gruppi di omologia $H_k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ e $H_k(S^n, S^n \setminus \{S\})$, dove S è il polo sud.

5. Calcolare i gruppi di omologia e di omologia ridotta dei seguenti spazi:
$$S^1 \sqcup S^1, \quad D^3 \times S^1, \quad S^2 \vee S^2, \quad D^2 \setminus \{P, Q, R\},$$
   dove P, Q, R sono tre punti in D^2.

6. Calcolare i gruppi di omologia $H_k(S^n, S^{n-1})$.

7. (vedi Hatcher, pag.125, in alto). Siano X uno spazio ed $A \subset X$ un sottospazio. Sia CA il cono su A, ossia il quoziente $(A \times [0,1])/(A \times \{0\})$. Infine, sia $X \cup CA$ lo spazio ottenuto incollando $A \times \{0\} \subset CA$ ad X lungo A. Verificare che $H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n(X \cup CA)$, per ogni n. Osservare che la Proposizione 2.22, pag. 124, **non** vale per coppie arbitrarie (X, A): vedi Esercizio 26, pag. 133.

8. (vedi Hatcher, Esempio 2.23, parte 2, pag.125). Considerare la Delta-struttura della sfera S^n data da due n-simplessi Δ^n_1 e Δ^n_2, incollati lungo il bordo rispettando l'ordinamento dei vertici. Verificare che la differenza $\Delta^n_1 - \Delta^n_2$, vista come n-catena singolare, è un generatore di $H_n(S^n)$.