1. Esibire, se esistono, omomorfismi tali che la successione data sia esatta

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_8 \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_4 \longrightarrow 0.$$

2. Considerare la successione di gruppi abeliani

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$

   di Hatcher, Thm 2.16, pag.117. Dimostrare che $\ker(j_*) = \mathrm{Im}(i_*)$.

3. Sia X uno spazio topologico. Si chiama *complesso di catene esteso* il complesso

$$\ldots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \ldots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

   ottenuto dal complesso delle catene singolari di X mediante la mappa

$$\epsilon\colon C_0(X) \to \mathbf{Z}, \quad \sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha^0 \mapsto \sum_\alpha n_\alpha.$$

   I gruppi di omologia di questo complesso si chiamano *gruppi di omologia ridotta* di X e si indicano con $\widetilde{H}_n(X)$. Per $n \geq 0$, calcolare $\widetilde{H}_n(X)$, dove X è uno spazio connesso per archi. Calcolare $\widetilde{H}_0(X)$ quando X è formato da N componenti connesse per archi.

Nella pagina del corso di Topologia Algebrica 2012-13, trovate le soluzioni dei seguenti esercizi (vedi Esercizi 7).

1. Considerare la successione di gruppi abeliani

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$

   di Hatcher, Thm 2.16, pag.117. Dimostrare che $\ker(i_*) = \mathrm{Im}(\partial)$.

2. Verificare che i gruppi di *omologia ridotta* (ottenuti dal complesso delle catene singolari *esteso*) di un punto sono tutti nulli.

3. Sia X uno spazio non vuoto. Verificare che $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbf{Z}$.

5. Nel seguente diagramma commutativo le due righe sono esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

   (a) Dimostrare che se f è suriettiva e g è iniettiva, allora h è iniettiva.
   (b) Dimostrare che se g è suriettiva e h è iniettiva, allora f è suriettiva.

6. Siano A, B, C, D, A', B', C' e D' gruppi abeliani. Nel seguente diagramma commutativo le due righe sono esatte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "h"] & D \arrow[d, "k"] \\
A' \arrow[r, "\phi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r, "\chi'"] & D'.
\end{tikzcd}$$

   Dimostrare che se f è suriettiva e g e k sono iniettive, allora h è iniettiva.

7. Sia

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow 0$$

   una successione esatta di gruppi abeliani finiti. Dimostrare che $\prod_{i=1}^{n} \# A_i^{(-1)^i} = 1$.