1. *Sia $0 \to A \to B \to C \to 0$ una successione esatta corta di gruppi abeliani. Sia G un gruppo abeliano.*
   (a) La successione $0 \to Hom(C,G) \to Hom(B,G) \to Hom(A,G)$ è esatta.
   (b) Se $B \cong A \oplus C$, allora la successione $0 \to Hom(C,G) \to Hom(B,G) \to Hom(A,G) \to 0$ è esatta.

Sol.:

2. *Sia G un gruppo abeliano.*
   (a) Verificare che $Ext(\mathbf{Z}_n, G) \cong G/nG$.
   (b) Calcolare $Ext(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m)$.

Sol.:(a) Una risoluzione libera del gruppo $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ è data da

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{f_1} \mathbf{Z} \xrightarrow{f_0} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0,$$

dove f_1 è la moltiplicazione per n ed f_0 è la proiezione al quoziente. Passando alla successione $Hom(-,G)$, abbiamo la successione esatta

$$0 \to Hom(\mathbf{Z}_n, G) \xrightarrow{f_0^*} Hom(\mathbf{Z}, G) \xrightarrow{f_1^*} Hom(\mathbf{Z}, G) \to Hom(\mathbf{Z}, G)/Im(f_1^*) \to 0,$$

e per definizione $Ext(\mathbf{Z}_n, G) := Hom(\mathbf{Z}, G)/Im(f_1^*)$.
Osserviamo che $Hom(\mathbf{Z}, G) \cong G$: un omomorfismo $\phi\colon \mathbf{Z} \to G$ è completamente determinato da $\phi(1) \in G$ e la mappa $\phi \mapsto \phi(1)$ definisce l'isomorfismo cercato $Hom(\mathbf{Z}, G) \xrightarrow{\cong} G$.
Inoltre la mappa $f_1^*\colon Hom(\mathbf{Z}, G) \longrightarrow Hom(\mathbf{Z}, G)$ è la moltiplicazione per n: infatti dalla composizione delle mappe

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \xrightarrow{\phi} G,$$

abbiamo $f_1^*(\phi)(x) = \phi \circ f_1(x) = \phi(nx) = n\phi(x)$. Ne segue che $Ext(\mathbf{Z}_n, G) \cong G/nG$.

(b) Per quanto dimostrato al punto (a), $Ext(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m) \cong \mathbf{Z}_m/n\mathbf{Z}_m$. Quindi dobbiamo esaminare la moltiplicazione per n in $\mathbf{Z}_m$. Sia $d = \gcd(n,m)$. Poiché l'equazione diofantea $nx + mk = y$ ha soluzioni se e solo se $d \mid y$, abbiamo che l'immagine della moltiplicazione per n in $\mathbf{Z}_m$ è data dai multipli di d. Ne segue che $Ext(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m) \cong \mathbf{Z}_m/n\mathbf{Z}_m \cong \mathbf{Z}_m/d\mathbf{Z}_m$. Ad esempio, se $d = 1$ tale immagine è tutto $\mathbf{Z}_m$ e si ha $Ext(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m) = 0$.

3. *Verificare che $Ext(H, G) = 0$, se H è un gruppo libero.*

Sol.: Sia

$$0 \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0, \qquad \text{dove } F_0 \cong H \ \text{ e } \ F_1 = 0,$$

una risoluzione libera di H. Allora la successione

$$0 \to Hom(H, G) \xrightarrow{f_0^*} Hom(F_0, G) \xrightarrow{f_1^*} Hom(F_1, G) \to Hom(F_1, G)/Im(f_1^*) \to 0$$

è esatta. Per definizione, $Ext(H,G) := Hom(F_1, G)/Im(f_1^*)$. Poiché $F_1 = 0$, abbiamo $Hom(F_1, G) = Ext(H, G) = 0$.

4. *Hatcher, esercizio 8(c), pag.205.*

Sol.: Siano $A \subset X$ spazi topologici, con A retratto di X. Questo significa che esiste una mappa continua $r\colon X \to A$, tale che la composizione $A \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{r} A$ soddisfa $r \circ \iota = Id_A$. I corrispondenti omomorfismi indotti in coomologia

$$H^*(A) \xrightarrow{r^*} H^*(X) \xrightarrow{\iota^*} H^*(A) \tag{1}$$

soddisfano $\iota^* \circ r^* = Id_{H^*(A)}$, per cui r^* è iniettivo e ι^* è suriettivo.
Consideriamo adesso la successione esatta lunga di coomologia della coppia a coefficienti in G

$$\ldots \to H^{n-1}(X,G) \xrightarrow{\iota^*} H^{n-1}(A,G) \xrightarrow{\delta^*} H^n(X,A,,G) \to H^n(X,G) \xrightarrow{\iota^*} H^n(A,G) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(X,A,G) \to \ldots$$

Dall'esattezza della successione e dal fatto che l'omomorfismo ι^* è suriettivo, abbiamo che δ^* è identicamente nullo. Di conseguenza, possiamo estrarre la successione esatta corta

$$0 \to H^n(X,A,G) \to H^n(X,G) \xrightarrow{\iota^*} H^n(A,G) \to 0. \tag{2}$$

L'esistenza di un omomorfismo r^* come in (1) equivale allo spezzamento della (2), ossia all'isomorfismo

$$H^n(X,G) \cong H^n(X,A,G) \oplus H^n(A,G),$$

come richiesto.

5. *Calcolare i gruppi di coomologia di una superficie di Riemann non orientabile, a coefficienti in $\mathbf{Z}_n$ e in $\mathbf{R}$.*

Sol.: I gruppi di omologia singolare di una superficie di Riemann non orientabile $X = \mathbf{P}^2\#\ldots\#\mathbf{P}^2$, somma connessa di n piani proiettivi, sono dati da

$$H_i(X) = 0,\ i \neq 0,1, \quad H_0(X) = \mathbf{Z}, \quad H_1(X) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z},$$

dove in $H_1(X)$ ci sono $(n-1)$ copie di $\mathbf{Z}$. Per ogni gruppo abeliano G e per ogni k, dal teorema dei coefficienti universali, abbiamo la successione esatta

$$0 \to Ext(H_{k-1}(X), G) \to H^k(X,G) \to Hom(H_k(X), G) \to 0.$$

Poiché $Ext(0,G) = 0$ per ogni G, abbiamo $H^k(X,G) = 0$, per ogni $k \neq 0,1,2$.

• $G = \mathbf{R}$:
$k = 0, \quad Ext(0,\mathbf{R}) = 0, \quad H^0(X,\mathbf{R}) \cong Hom(\mathbf{Z},\mathbf{R}) \cong \mathbf{R};$
$k = 1, \quad Ext(\mathbf{Z},\mathbf{R}) = 0$ ed $Ext(-,G)$ è additivo, per ogni G. Ne segue che

$$H^1(X,\mathbf{R}) \cong Hom(\mathbf{Z}_2,\mathbf{R}) \oplus Hom(\mathbf{Z},\mathbf{R}) \oplus \ldots \oplus Hom(\mathbf{Z},\mathbf{R}).$$

Poiché $Hom(\mathbf{Z}_2,\mathbf{R}) = 0$ e $Hom(\mathbf{Z},\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$, vale

$$H^1(X,\mathbf{R}) \cong \mathbf{R} \oplus \ldots \oplus \mathbf{R}, \quad ((n-1) \text{ copie di } \mathbf{R}).$$

Per $k = 2$, vale

$$H^2(X, \mathbf{R}) \cong Ext(\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}, \mathbf{R}) = Ext(\mathbf{Z}_2, \mathbf{R}) \oplus Ext(\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}, \mathbf{R}) = Ext(\mathbf{Z}_2, \mathbf{R}).$$

Per l'Esercizio 2(a) abbiamo che $Ext(\mathbf{Z}_2, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}/2\mathbf{R} = 0$, da cui $H^2(X, \mathbf{R}) = 0$.

• $G = \mathbf{Z}_n$:
$k = 0, \quad Ext(0, \mathbf{R}) = 0, \quad H^0(X, \mathbf{R}) \cong Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) \cong \mathbf{Z}_n;$
$k = 1, \quad Ext(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) = 0$ ed $Ext(-, G)$ è additivo, per ogni G. Ne segue che

$$H^1(X, \mathbf{R}) \cong Hom(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_n) \oplus Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) \oplus \ldots \oplus Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n).$$

Poiché $Hom(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_n) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & n \textit{ pari} \\ 0, & n \textit{ dispari} \end{cases}$ e $Hom(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) \cong \mathbf{Z}_n$, abbiamo

$$H^1(X, \mathbf{Z}_n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_n \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_n, & n \textit{ pari} \\ \mathbf{Z}_n \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_n, & n \textit{ dispari}, \end{cases} \qquad ((n-1) \text{ copie di } \mathbf{Z}_n).$$

Per $k = 2$, vale

$$H^2(X, \mathbf{Z}_n) \cong Ext(\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) = Ext(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_n) \oplus Ext(\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) = Ext(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_n).$$

Per l'Esercizio 2(a) abbiamo che $Ext(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_n) \cong \mathbf{Z}_n/2\mathbf{Z}_n \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & n \textit{ pari} \\ 0, & n \textit{ dispari} \end{cases}$, da cui

$$H^2(X, \mathbf{R}) \cong \mathbf{Z}_n/2\mathbf{Z}_n \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_2, & n \textit{ pari} \\ 0, & n \textit{ dispari}. \end{cases}$$