1. *Sia $0 \to A \to B \to C \to 0$ una successione esatta corta di gruppi abeliani. Sia G un gruppo abeliano.*
   (a) La successione $A \otimes G \to B \otimes G \to C \otimes G \to 0$ è esatta.
   (b) Se $B \cong A \oplus C$, allora la successione $0 \to A \otimes G \to B \otimes G \to C \otimes G \to 0$ è esatta.

Sol.:

2. *Sia G un gruppo abeliano.*
   (a) Verificare che
$$Tor(\mathbf{Z}_n, G) \cong \ker(G \xrightarrow{n} G).$$
   (b) Calcolare $Tor(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m)$.

Sol.: (a) Una risoluzione libera del gruppo $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ è data da

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{f_1} \mathbf{Z} \xrightarrow{f_0} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0,$$

dove f_1 è la moltiplicazione per n ed f_0 è la proiezione al quoziente. Tensorizzando tutto con G (su $\mathbf{Z}$), troviamo la successione esatta a destra

$$\mathbf{Z} \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes 1} \mathbf{Z} \otimes G \xrightarrow{f_0 \otimes 1} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \otimes G \to 0.$$

Per definizione $Tor(\mathbf{Z}_n, G)$ è il nucleo della mappa $f_1 \otimes 1 \colon \mathbf{Z} \otimes G \to \mathbf{Z} \otimes G$, data da $x \otimes g \mapsto nx \otimes g = x \otimes ng$. Osserviamo che la moltiplicazione per n è iniettiva su $\mathbf{Z}$, per cui $nx \otimes g = x \otimes ng = 0$ se e solo se $ng = 0$. Dunque $Tor(\mathbf{Z}_n, G) \cong \ker(G \xrightarrow{n} G)$.

(b) Per il punto (a) dobbiamo calcolare $\ker(\mathbf{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbf{Z}_m)$.
Sia $\bar{x} \in \mathbf{Z}_m$. Abbiamo che $n\bar{x} = 0 \in \mathbf{Z}_m$ e se e solo se $nx = km$, per qualche $k \in \mathbf{Z}$. In altre parole (x, k) è una soluzione dell'equazione omogena diofantea $nx - km = 0$, o dell'equazione omogena diofantea equivalente $\frac{n}{d}x - k\frac{m}{d} = 0$, dove $d = \gcd(n, m)$. Tutte e sole le soluzioni di tale equazione solo del tipo $\mathbf{Z}(\frac{m}{d}, \frac{n}{d})$, da cui segue che $x \in \mathbf{Z}\frac{m}{d}$ e

$$Tor(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m) = \ker(\mathbf{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbf{Z}_m) \cong \mathbf{Z}_d.$$

Ad esempio, se $gcd(n, m) = 1$, ne segue che $Tor(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m) = \ker(\mathbf{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbf{Z}_m) = 0$.
Se $gcd(n, m) = m$, allora $Tor(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m) = \ker(\mathbf{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbf{Z}_m) = \mathbf{Z}_m$.

3. *Verificare che $Tor(A, B) = 0$, se A o B è un gruppo libero.*

Sol.: Supponiamo che ad esempio A sia libero (poiché $Tor(A, B) = Tor(B, A)$ (vedi Hatcher, Prop. 3A.5 (1)), possiamo sempre ricondurci a questo caso). Sia

$$0 \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \to 0, \qquad \text{dove } F_0 \cong A \ \text{ e } \ F_1 = 0, \text{ (precisamente } F_i = 0,\ \forall i > 0)$$

una sua risoluzione libera. Allora la successione

$$0 \to \ker(f_1 \otimes 1) \to F_1 \otimes B \xrightarrow{f_1 \otimes 1} F_0 \otimes B \xrightarrow{f_0 \otimes 1} A \otimes B \to 0$$

è esatta. In questo caso $Tor(A,B) := \ker f_1 \otimes 1$. Poiché $F_1 = F_1 \otimes B = 0$, anche $Tor(A,B) = 0$.

4. *Calcolare i gruppi di omologia degli spazi proiettivi reali $X = \mathbf{R}P^n$, a coefficienti in $\mathbf{Z}_3$ e in $\mathbf{R}$.*

Sol.: Dal teorema dei coefficienti universali, per ogni k, abbiamo una successione esatta corta

$$0 \to H_k(X) \otimes G \to H_k(X,G) \to Tor(H_{k-1}(X),G) \to 0.$$

• $G = \mathbf{R}$:
poiché $Tor(0,\mathbf{R}) = Tor(\mathbf{Z},\mathbf{R}) = Tor(\mathbf{Z}_2,\mathbf{R}) = 0$, vale

$$H_k(X,\mathbf{R}) \cong H_k(X) \otimes \mathbf{R} = \begin{cases} \mathbf{R} & k = 0, k = n \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo usato $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$ e $\mathbf{Z}_2 \otimes \mathbf{R} = 0$.

• $G = \mathbf{Z}_3$:
poiché $Tor(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_3) = Tor(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_3) = 0$, vale

$$H_k(X,\mathbf{Z}_3) \cong H_k(X) \otimes \mathbf{Z}_3 = \begin{cases} \mathbf{Z}_3 & k = 0, k = n \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo usato $\mathbf{Z} \otimes G \cong G$ e $\mathbf{Z}_2 \otimes G \cong G/2G$, per ogni gruppo G. In particolare $\mathbf{Z}_3/2\mathbf{Z}_3 = 0$.

5. *Calcolare i gruppi di omologia della bottiglia di Klein K, a coefficienti in $\mathbf{Z}_2$, in $\mathbf{Z}_3$ e in $\mathbf{R}$.*

Sol.: I gruppi di omologia singolare di K sono

$$H_0(K) = \mathbf{Z}, \quad H_1(K) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}, \quad H_i(K) = 0,\ i \neq 0, 1.$$

• $G = \mathbf{R}$:
poiché $Tor(0,\mathbf{R}) = Tor(\mathbf{Z},\mathbf{R}) = Tor(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2,\mathbf{R}) = 0$, vale

$$H_k(K,\mathbf{R}) \cong H_k(K) \otimes \mathbf{R} = \begin{cases} \mathbf{R} & k = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo usato $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$ e $\mathbf{Z}_2 \otimes \mathbf{R} = 0$.

• $G = \mathbf{Z}_3$:
poiché $Tor(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_3) = Tor(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_3) = 0$, vale

$$H_k(X,\mathbf{Z}_3) \cong H_k(X) \otimes \mathbf{Z}_3 = \begin{cases} \mathbf{Z}_3 & k = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo usato $\mathbf{Z} \otimes G \cong G$ e $\mathbf{Z}_2 \otimes G \cong G/2G$, per ogni gruppo G. In particolare $\mathbf{Z}_3/2\mathbf{Z}_3 = 0$.

• $G = \mathbf{Z}_2$:
$k = 0, \quad Tor(H_{-1}(K),\mathbf{Z}_2) = 0, \quad H_0(X,\mathbf{Z}_2) \cong H_0(X) \otimes \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2;$
$k = 1, \quad Tor(H_0(K),\mathbf{Z}_2) = 0, \quad H_1(X,\mathbf{Z}_2) \cong H_1(X) \otimes \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \otimes \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2.$
$k = 2, \quad H_2(X,\mathbf{Z}_2) \cong Tor(H_1(X),\mathbf{Z}_2) = Tor(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_2) \oplus Tor(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2.$