

1. Ricostruire la dimostrazione del punto (g), Hatcher, pag.134.
2. Ricostruire la dimostrazione del Teorema 2.28, Hatcher, pag.135: le sfere di dimensione pari non si possono pettinare.
3. Hatcher, Esercizi 2 & 4, pag.155.

Sol.: Hatcher, Esercizio 2, pag.155: vedi TA 2012-13, soluzioni Esercizi 9, n.3.

Hatcher, Esercizio 4, pag.155:

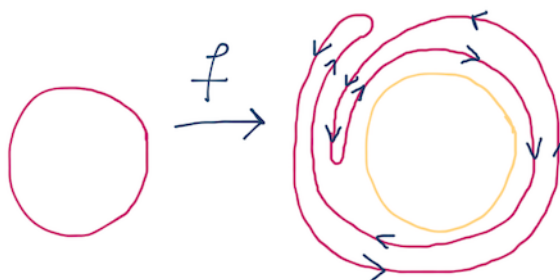
Identifichiamo la sfera S^n con l'equatore $\{t = 0\}$ della sfera $n + 1$ -dimensionale

$$S^{n+1} = \{(X, t) = (x_1, \dots, x_{n+1}, t) \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 + t^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^{n+2}.$$

Sia una mappa continua $f: S^n \rightarrow S^n$. A partire da essa si definisce una mappa $\Sigma(f): S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$, detta *sospensione di f* , nel modo seguente

$$\Sigma(f)(X, t) := \begin{cases} (X, t), & X = 0 \\ \left(\|X\| f\left(\frac{X}{\|X\|}\right), t \right), & X \neq 0. \end{cases}$$

La mappa $\Sigma(f)$ è continua, manda i paralleli di S^{n+1} in se stessi (un punto della sfera e la sua immagine hanno la stessa coordinata t) e coincide con f sull'equatore. Inoltre è suriettiva quando f lo è: infatti $\Sigma(f)$ manda il meridiano per $(\frac{X}{\|X\|}, 0)$ nel meridiano per $(f(\frac{X}{\|X\|}), 0)$. Infine, le mappe $\Sigma(f)$ ed f hanno lo stesso grado (vedi Hatcher, Prop. 2.33, pag. 137). Dunque, per ottenere una mappa suriettiva $g: S^n \rightarrow S^n$ di grado zero, basta costruirne una da S^1 in sè ed applicare $n - 1$ sospensioni successive. Una mappa suriettiva di grado zero $S^1 \rightarrow S^1$ è illustrata nella figura qui sotto:



4. *Hatcher, Esercizio 19, pag.157.*

Sol.: Consideriamo la struttura di CW-complesso dello spazio proiettivo reale data dall'attaccamento di una cella in ogni dimensione (vedi Hatcher, Esempio 0.4). Lo spazio $X = \mathbf{P}^n/\mathbf{P}^m$ è ottenuto da $\mathbf{P}^n$ identificando ad un punto l' m -scheletro $\mathbf{P}^m$. Di conseguenza, la decomposizione cellulare di $X = \mathbf{P}^n/\mathbf{P}^m$ è data da

$$X^0 = \dots = X^m \subset X^{m+1} \subset X^{m+2} \subset \dots \subset X^n,$$

con

$$X^0 = \dots = X^m = 1pt, \quad X^{m+1} = S^{m+1} \quad X^k = \mathbf{P}^k, \quad m+2 \leq k \leq n.$$

Inoltre, il complesso cellulare dello spazio $X = \mathbf{P}^n/\mathbf{P}^m$ è dato dai gruppi

$$H_k(X^k, X^{k-1}) = \mathbf{Z}, \quad m+1 \leq k \leq n,$$

$$H_k(X^k, X^{k-1}) = 0, \quad 0 < k \leq m, \quad H_0(X^0) = \mathbf{Z},$$

e dagli omomorfismi

$$d_k = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 0, & \text{per } k \text{ dispari} \\ 2, & \text{per } k \text{ pari,} \end{cases} \quad m+2 \leq k \leq n,$$

$$d_k = 0, \quad 0 \leq k \leq m+1.$$

In altre parole, il complesso cellulare dello spazio $X = \mathbf{P}^n/\mathbf{P}^m$ coincide con quello di $\mathbf{P}^n$ nel tratto di indici $m+2 \leq k \leq n$ ed è dato da zeri nel tratto di indici $0 \leq k \leq m$:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{d_n} \mathbf{Z} \xrightarrow{d_{n-1}} \mathbf{Z} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_{m+2}} \mathbf{Z} \xrightarrow{d_{m+1}} 0 \xrightarrow{d_m} \dots \rightarrow 0 \xrightarrow{d_1} \mathbf{Z} \xrightarrow{d_0} 0.$$

Ne segue immediatamente che

per $m = n-1$,

$$H_0(X) = \mathbf{Z}, \quad H_n(X) = \mathbf{Z}, \quad H_k(X) = 0 \quad \text{altrimenti.}$$

Questo concorda col fatto che in questo caso $X = \mathbf{P}^n/\mathbf{P}^{n-1} \cong S^n$.

Per $m \leq n-2$, abbiamo

$$H_0(X) = \mathbf{Z}, \quad H_k(X) = 0, \quad 0 < k \leq m, \quad H_k(X) \cong H_k(\mathbf{P}^n), \quad m+2 \leq k \leq n.$$

Infine

$$H_{m+1}(X) = \ker d_{m+1}/\text{Im}(d_{m+2}) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \text{per } m+1 \text{ dispari } (m \text{ pari}) \\ \mathbf{Z}, & \text{per } m+1 \text{ pari } (m \text{ dispari}). \end{cases}$$

• *Alternativamente*, possiamo usare la successione esatta di omologia ridotta della coppia $(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m)$. Infatti, poiché si tratta di una buona coppia, vale

$$\tilde{H}_k(\mathbf{P}^n/\mathbf{P}^m) \cong \tilde{H}_k(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m), \quad \forall k.$$

Assumiamo $m < n-1$ (se $m = n-1$, abbiamo già osservato che $X \cong S^n$).

Poiché $H_i(\mathbf{P}^m) = 0$ per $i > m$, da

$$\dots \rightarrow H_k(\mathbf{P}^m) \rightarrow H_k(\mathbf{P}^n) \rightarrow H_k(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \rightarrow H_{k-1}(\mathbf{P}^m) \rightarrow \dots, \quad k > m+1$$

ricaviamo

$$H_k(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \cong H_k(\mathbf{P}^n), \quad k > m+1.$$

• m dispari

Per $k = m+1$ pari, la successione

$$\dots \rightarrow H_{m+1}(\mathbf{P}^m) \rightarrow H_{m+1}(\mathbf{P}^n) \rightarrow H_{m+1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \rightarrow H_m(\mathbf{P}^m) \rightarrow$$

diventa

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow H_{m+1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \rightarrow 0,$$

da cui

$$H_{m+1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \cong \mathbf{Z}_2.$$

Per $k \leq m$, la successione

$$\rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow H_k(\mathbf{P}^m) \rightarrow H_k(\mathbf{P}^n) \rightarrow H_k(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \rightarrow H_{k-1}(\mathbf{P}^m) \rightarrow H_{k-1}(\mathbf{P}^n) \rightarrow H_{k-1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \rightarrow$$

diventa

• m pari.

Per $k = m+1$ dispari, la successione

$$\dots \rightarrow H_{m+1}(\mathbf{P}^m) \rightarrow H_{m+1}(\mathbf{P}^n) \rightarrow H_{m+1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \rightarrow H_m(\mathbf{P}^m) \rightarrow H_m(\mathbf{P}^n) \rightarrow H_m(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \rightarrow H_{m-1}(\mathbf{P}^m) \rightarrow$$

diventa

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{m+1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow H_m(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \rightarrow 0.$$

Il gruppo $H_{m+1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m)$ è un sottogruppo di $\mathbf{Z}$: non può essere nullo, perché altrimenti si avrebbe un omomorfismo iniettivo di $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}_2$. Assurdo. Dunque $H_{m+1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m)$ è un sottogruppo non banale di $\mathbf{Z}$. Ne segue che

$$H_{m+1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^m) \cong \mathbf{Z}.$$

• Adesso dobbiamo considerare $k \leq m$. Etc...etc.....

5. Calcolare l'omologia cellulare delle superfici compatte (vedi Hatcher, Esempio 2.36 ed Esempio 2.37, pag. 141).

6. Calcolare la caratteristica di Eulero-Poincaré delle superfici compatte. Usare il risultato ottenuto per riformulare il teorema di classificazione delle superfici compatte.

7. Calcolare la caratteristica di Eulero-Poincaré degli spazi proiettivi reali $\mathbf{R}P^n$, per $n \geq 1$.

Sol.: Ricordiamo che per $X = \mathbf{R}P^n$ vale

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & k=0, k=n \text{ dispari} \\ \mathbf{Z}_2, & k \text{ dispari} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{rango}(H_k(X)) = \begin{cases} 1, & k=0, k=n \text{ dispari} \\ 0, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Pertanto la caratteristica di Eulero-Poincaré di X risulta

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{rango}(H_k(X)) = \begin{cases} 1, & k \text{ pari} \\ 0, & k \text{ dispari}. \end{cases}$$