1. *Sia D un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ omeomorfo al disco k-dimensionale D^k. Calcolare i gruppi di omologia $H_i(\mathbf{R}^n \setminus D)$.*

Sol.: Dal teorema di separazione, sappiamo che $\widetilde{H}_i(S^n \setminus D) = 0$, per ogni i. In particolare, $S^n \setminus D$ è un aperto connesso e quindi connesso per archi di S^n (l'immagine omeomorfa di D^k in S^n, che è di Hausdorff, è compatta e quindi chiusa). Sia $N \in S^n$ i polo nord. Supponiamo che $N \notin D$ e identifichiamo $\mathbf{R}^n$ con $S^n \setminus N$. Dalla successione esatta di omologia della coppia $(S^n \setminus D, \mathbf{R}^n \setminus D)$

$$\ldots \to \widetilde{H}_{i+1}(S^n \setminus D) \to H_{i+1}(S^n \setminus D, \mathbf{R}^n \setminus D) \to \widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus D) \to \widetilde{H}_i(S^n \setminus D) \to \ldots,$$

troviamo

$$\widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus D) \cong H_{i+1}(S^n \setminus D, \mathbf{R}^n \setminus D), \quad \forall i.$$

Inoltre, per il teorema di escissione, applicato a $D \subset \mathbf{R}^n \subset S^n$, e dalla successione esatta della coppia $(S^n, \mathbf{R}^n)$, abbiamo

$$H_{i+1}(S^n \setminus D, \mathbf{R}^n \setminus D) \cong H_{i+1}(S^n, \mathbf{R}^n) \cong \widetilde{H}_{i+1}(S^n), \qquad \forall i.$$

In conclusione,

$$\widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus D) = \begin{cases} \mathbf{Z} & i = n-1 \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad H_i(\mathbf{R}^n \setminus D) = \widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus D), \quad i > 0, \quad H_0(\mathbf{R}^n \setminus D) = \mathbf{Z}.$$

2. *Sia S un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ omeomorfo alla sfera k-dimensionale S^k. Calcolare i gruppi di omologia $H_i(\mathbf{R}^n \setminus S)$.*

Sol.: Supponiamo che $N \notin S$ e identifichiamo $\mathbf{R}^n$ con $S^n \setminus N$.
Inoltre consideriamo intanto il caso $n > 1$.

• Sia $k < n - 1$.
Dal teorema di separazione, sappiamo che $\widetilde{H}_i(S^n \setminus S) = \widetilde{H}_i(S^{n-k-1})$, per ogni i. In particolare, $S^n \setminus S$ è un aperto connesso, e quindi connesso per archi, di S^n. Lo stesso vale per $\mathbf{R}^n \setminus S$.
Dalla successione esatta di omologia della coppia $(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S)$ troviamo

$$\ldots \to \widetilde{H}_{i+1}(S^n \setminus S) \to H_{i+1}(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \to \widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus S) \to \widetilde{H}_i(S^n \setminus S) \to \ldots. \tag{3}$$

Per $i < n - k - 2$ e per $i > n - k - 1$, abbiamo $\widetilde{H}_i(S^n \setminus S) = \widetilde{H}_{i+1}(S^n \setminus S) = 0$ e di conseguenza

$$\widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus S) \cong H_{i+1}(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \cong H_{i+1}(S^n, \mathbf{R}^n) \cong \widetilde{H}_{i+1}(S^n),$$

dove gli ultimi due isomorfismi seguono rispettivamente dall'escissione e dalla successione esatta di omologia della coppia $(S^n, \mathbf{R}^n)$. Di conseguenza

$$\widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus S) = \begin{cases} \mathbf{Z} & i = n-1 \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad i \neq n-k-1,\ n-k-2.$$

Adesso consideriamo i tratti della successione esatta di omologia della coppia $(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S)$ che includono i gruppi di indici $i = n-k-1$ ed $i = n-k-2$

$$\ldots \to H_{n-k}(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \to \widetilde{H}_{n-k-1}(\mathbf{R}^n \setminus S) \to \widetilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus S) \to H_{n-k-1}(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \to \ldots$$

e

$$\ldots \to H_{n-k-1}(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \to \widetilde{H}_{n-k-2}(\mathbf{R}^n \setminus S) \to \widetilde{H}_{n-k-2}(S^n \setminus S) \to \ldots.$$

Dall'escissione e dalla successione esatta di omologia della coppia $(S^n, \mathbf{R}^n)$, nel nostro caso diventano rispettivamente

$$\ldots \to 0 \to \widetilde{H}_{n-k-1}(\mathbf{R}^n \setminus S) \to \mathbf{Z} \to 0 \to \ldots$$

e

$$\ldots \to 0 \to \widetilde{H}_{n-k-2}(\mathbf{R}^n \setminus S) \to 0 \to \ldots.$$

Ne segue che

$$\widetilde{H}_{n-k-1}(\mathbf{R}^n \setminus S) \cong \mathbf{Z}, \qquad \widetilde{H}_{n-k-2}(\mathbf{R}^n \setminus S) = 0.$$

Questo completa la determinazione dei gruppi di omologia ridotta di $\mathbf{R}^n \setminus S$:

$$\widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus S) = \begin{cases} \mathbf{Z} & i = n-1 \\ \mathbf{Z} & i = n-k-1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio: Se $S \cong S^1$, si ha

$$\widetilde{H}_i(\mathbf{R}^3 \setminus S) = \begin{cases} \mathbf{Z} & i = 2 \\ \mathbf{Z} & i = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nota che lo spazio , $\mathbf{R}^3 \setminus S$, con $S \cong S^1$, è omotopicamente equivalente a $S^2 \vee S^1$ (vedi Hatcher, Esempio 1.23, pag. 46).

I gruppi di omologia singolare "standard" differiscono da questi solo nel gruppo di indice $i = 0$, cioè $H_0(\mathbf{R}^n \setminus S) \cong \mathbf{Z}$.

• Sia $k = n-1$.
In questo caso, $S^n \setminus S$ consiste di due componenti connesse, entrambe acicliche (cioè che hanno l'omologia del punto). Anche le componenti connesse di $\mathbf{R}^n \setminus S$ sono due (se $n > 1$, un aperto connesso di S^n meno un punto è ancora connesso), una delle quali è anche una componente connessa di $S^n \setminus S$. Questa è aciclica.
Dalla (3) abbiamo

$$\widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus S) \cong H_{i+1}(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \cong H_{i+1}(S^n, \mathbf{R}^n) \cong \widetilde{H}_{i+1}(S^n), \qquad \forall i > 0.$$

Per $i = 0$,

$$\ldots \to 0 \to H_1(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \to \widetilde{H}_0(\mathbf{R}^n \setminus S) \to \widetilde{H}_0(S^n \setminus S) \to H_0(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \to \widetilde{H}_{-1}(\mathbf{R}^n \setminus S) \to \ldots,$$

dove

$$H_1(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \cong \widetilde{H}_1(S^n) = 0, \qquad H_1(S^n \setminus S, \mathbf{R}^n \setminus S) \cong \widetilde{H}_1(S^n) = 0.$$

Ne segue che

$$\widetilde{H}_0(\mathbf{R}^n \setminus S) \cong \widetilde{H}_0(S^n \setminus S) \cong \mathbf{Z},$$

cioè $\mathbf{R}^n \setminus S$ consiste di due componenti connesse, come previsto. Mettendo tutto insieme e tenendo conto che i gruppi di omologia di uno spazio sono somma diretta dei gruppi di omologia delle singole componenti,

$$\widetilde{H}_i(\mathbf{R}^n \setminus S) = \begin{cases} \mathbf{Z} & i = n-1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

I gruppi di omologia singolare "standard" differiscono da questi solo nel gruppo di indice $i = 0$, cioè $H_0(\mathbf{R}^n \setminus S) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (quelli delle singole componenti connesse sono isomorfi a $\mathbf{Z}$).

• Caso $n = 1$.
In questo caso $S = S^0 = \{\pm 1\}$ e $\mathbf{R} \setminus S$ consiste di tre intervalli. Ricaviamolo dai teoremi di separazione. I gruppi potenzialmente non nulli sono H_1, $\widetilde{H}_0$ e H_0.
Ricordiamo che $\widetilde{H}_i(S^1 \setminus S^0) \cong \widetilde{H}_i(S^0) = \begin{cases} \mathbf{Z} & i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Per $i = 1$, abbiamo la successione esatta

$$\ldots \to 0 \to H_2(S^1 \setminus S, \mathbf{R}^1 \setminus S) \to \widetilde{H}_1(\mathbf{R}^1 \setminus S) \to \widetilde{H}_1(S^1 \setminus S) \to \ldots,$$

dove $H_2(S^1 \setminus S, \mathbf{R}^1 \setminus S) = \widetilde{H}_1(S^1 \setminus S) = 0$. Dunque $\widetilde{H}_1(\mathbf{R}^1 \setminus S) = 0$.

Per $i = 0$, abbiamo la successione esatta

$$\ldots \to 0 \to H_1(S^1 \setminus S, \mathbf{R}^1 \setminus S) \to \widetilde{H}_0(\mathbf{R}^1 \setminus S) \to \widetilde{H}_0(S^1 \setminus S) \to H_0(S^1 \setminus S, \mathbf{R}^1 \setminus S) \to \ldots,$$

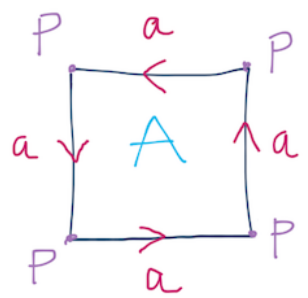
dove

$$H_1(S^1 \setminus S, \mathbf{R}^1 \setminus S) \cong \mathbf{Z}, \qquad H_0(S^1 \setminus S, \mathbf{R}^1 \setminus S) = 0, \quad \widetilde{H}_0(S^1 \setminus S) \cong \mathbf{Z}.$$

Poiché una successione esatta corta di gruppi abeliani $0 \to A \to B \to C \to 0$, con C libero si spezza, ne segue che $\widetilde{H}_0(\mathbf{R}^1 \setminus S) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, cioè $\mathbf{R}^1 \setminus S$ consiste di tre componenti connesse come previsto. Inoltre $H_0(\mathbf{R}^1 \setminus S) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

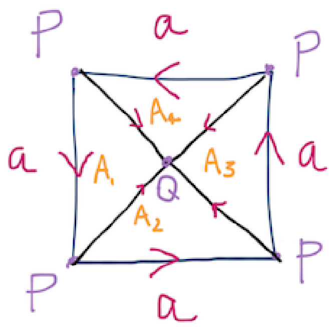
3. *Per ogni $n \in \mathbf{Z}_{>1}$, costruire uno spazio X il cui gruppo di omologia $H_1(X)$ sia ciclico di ordine n.*

Sol.: Dato un poligono regolare ad n lati, consideriamo lo spazio X ottenuto identificando fra loro tutti i lati "nello stesso verso":



Per il Teorema di Van Kampen, il gruppo fondamentale di X risulta $\Pi_1(X) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Poiché è abeliano, coincide con il primo gruppo di omologia, cioè $\Pi_1(X) \cong H_1(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Dunque lo spazio X soddisfa le condizioni richieste.

Alternativamente, possiamo definire su X una struttura di Delta-complesso come in figura



e calcolarne l'omologia simpliciale. Con i soliti metodi, troveremo

$$H_1^{\Delta}(X) = \ker \partial_1 / Im \partial_2 \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Poiché omologia simpliciale e singolare di un Δ-complesso sono isomorfe, lo spazio X soddisfa le condizioni richieste.

4. *Calcolare i gruppi di omologia $H_i(D^n, D^n \setminus \{x\})$, al variare di $x \in D^n$, il disco chiuso n-dimensionale. Concludere che ogni omeomorfismo del disco D^n in sè manda ∂D^n in sè.*

Sol.: Distinguiamo due casi: $x \in D^n \setminus \partial D^n$ e $x \in \partial D^n$.

• $x \in D^n \setminus \partial D^n$.
Abbiamo D^n contraibile e $D^n \setminus \{x\}$ che si retrae sul bordo $\partial D^n \cong S^{n-1}$. Dalla successione esatta della coppia $(D^n, D^n \setminus \{x\})$, segue

$$H_i(D^n, D^n \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(D^n \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & i = n-1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

• $x \in D^n \setminus \partial D^n$.
Abbiamo D^n contraibile e $D^n \setminus \{x\}$ omeomorfo a $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_n \geq 0\}$, contraibile. Dalla successione esatta della coppia $(D^n, D^n \setminus \{x\})$, segue

$$H_i(D^n, D^n \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(D^n \setminus \{x\}) = 0, \quad \forall i.$$

Se $f \colon D^n \to D^n$ è un omeomorfismo, induce isomorfismi fra i gruppi di omologia locale

$$f_* \colon H_i(D^n, D^n \setminus \{x\}) \to H_i(D^n, D^n \setminus \{f(x)\}).$$

Ne segue che $f(\partial D^n) = \partial D^n$.

5. *Calcolare i gruppi di omologia $H_i(M, M \setminus \{x\})$, al variare di $x \in M$, il nastro di Moebius (compatto). Calcolare i gruppi di omologia $H_i(X, X \setminus \{x\})$, al variare di $x \in X = S^1 \times [0,1]$. Concludere che M ed X non sono omeomorfi.*

Sol.: Sia x un punto interno di M. Allora esiste un intorno chiuso di x in M omeomorfo al disco D^2, con bordo omeomorfo a S^1. Dal teorema di escissione, abbiamo

$$H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong H_i(D^2, D^2 \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(D^2 \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^1) = \begin{cases} \mathbf{Z} & i = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se invece x appartiene al bordo di M, sempre per il teorema di escissione, possiamo ricondurci al caso di $x \in D^2 \setminus \partial D^2$ e ottenere

$$H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong H_i(D^2, D^2 \setminus \{x\}) = 0, \quad \forall i.$$

Lo stesso vale per i punti di X, seconda che si trovino all'interno o sul bordo di X. Se $f \colon M \to X$ è un omeomorfismo, induce isomorfismi fra i gruppi di omologia locale, per cui deve valere $f(\partial M) = \partial X$. Questo è assurdo perché il bordo di M è connesso, mentre quello di X ha due componenti connesse.