1. *Siano U, V connessi per archi e sia $H_1(U \cup V) = 0$. Allora $U \cap V$ è connesso. Esempio: Siano A e B sottospazi chiusi disgiunti di uno spazio X, con $H_1(X) = 0$. Allora, se $X \setminus A$ e $X \setminus B$ sono connessi per archi, allora anche $X \setminus A \cup B$ connesso per archi.*

Sol.: Scriviamo la parte finale della successione esatta di omologia di Mayer-Vietoris dello spazio $X = U \cup V$:

$$\ldots \to H_1(U \cup V) \to \widetilde{H}_0(U \cap V) \to \widetilde{H}_0(U) \oplus \widetilde{H}_0(V) \to \widetilde{H}_0(U \cup V) \to 0. \quad (1)$$

Se U e V sono connessi per archi e $H_1(U \cup V) = 0$, la successione diventa

$$\ldots \to 0 \to \widetilde{H}_0(U \cap V) \to 0 \oplus 0 \to \ldots,$$

da cui $\widetilde{H}_0(U \cap V) = 0$. Ne segue che l'intersezione $U \cap V$ è connessa per archi e, in particolare, connessa.
Nell'esempio si applica quanto sopra ai sottoinsiemi aperti $U = X \setminus A$ e $V = X \setminus B$.

2. *Sia $U \cap V$ connesso per archi con $H_1(U \cap V) = 0$. Allora $H_1(U \cup V)$ è isomorfo alla somma diretta di $H_1(U)$ e $H_1(V)$.*

Sol.: Questa volta la parte della successione di Mayer-Vietoris che ci interessa è

$$\ldots \to H_1(U \cap V) \to H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(U \cup V) \to \widetilde{H}_0(U \cap V) \to \ldots \quad (2)$$

Se $U \cap V$ è connesso per archi e $H_1(U \cap V) = 0$, la (2) diventa

$$0 \to H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(U \cup V) \to 0,$$

da cui la tesi.

3. *Siano U, V connessi per archi con $H_1(U) = H_1(V) = 0$. Se $U \cap V$ ha $m \geq 1$ componenti connesse, allora $H_1(U \cup V)$ è un gruppo abeliano libero con $m - 1$ generatori.*
   Calcolare $H_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_k\})$, dove $P_1, \ldots, P_k$ sono punti del piano.

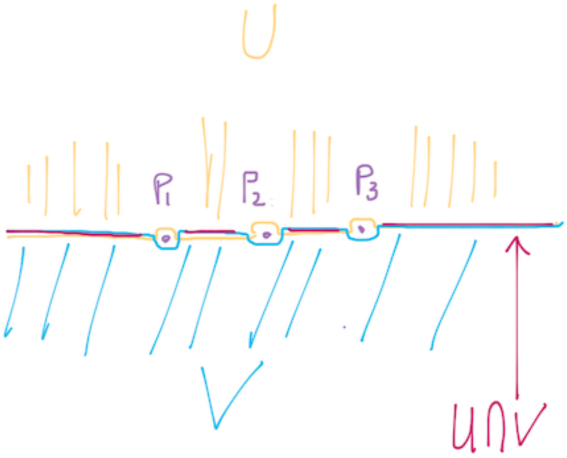
Sol.: Consideriamo la successione di Mayer-Vietoris

$$\ldots \to H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(U \cup V) \to \widetilde{H}_0(U \cap V) \to \widetilde{H}_0(U) \oplus \widetilde{H}_0(V) \to \widetilde{H}_0(U \cup V) \to 0, \quad (1)$$

che nelle nostre ipotesi diventa

$$\ldots 0 \oplus 0 \to H_1(U \cup V) \to \widetilde{H}_0(U \cap V) \to 0 \oplus 0 \ldots.$$

Ne segue che $H_1(U \cup V) \cong \widetilde{H}_0(U \cap V)$. Infine, se $U \cap V$ ha $m \geq 1$ componenti connesse, allora $H_0(U \cap V) \cong \mathbf{Z}^m$ e $\widetilde{H}_0(U \cap V) \cong \mathbf{Z}^{m-1}$, da cui la tesi.
Per calcolare $H_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_k\})$, basta far vedere che esiste un ricoprimento di $\mathbf{R}^2$ formato da due aperti contrattili la cui intersezione consiste di $k + 1$ componenti connesse (e connesse per archi): vedi figura.



4. *Hatcher, esercizio 28, pag.157; esercizio 31, pag.158.*

Sol.: • *Hatcher, esercizio 28, pag.157:*
(a) Sia X lo spazio topologico ottenuto incollando il nastro di Möbius M lungo il suo bordo $\partial M \cong S^1$ al toro $T \cong S^1 \times S^1$ lungo la curva $S^1 \times \{x_0\}$, con $x_0 \in S^1$. Chiamiamo C la curva di incollamento in X. Calcoliamo i gruppi di omologia di X usando la successione di Mayer-Vietoris. Fissiamo il seguente ricoprimento aperto $\{A, B\}$ di X:
$A = T \cup N_M(C)$, dove $N_M(C)$ è un intorno aperto di C in $M \subset X$, di cui C è un retratto di deformazione;
$B = M \cup N_T(C)$, dove $N_T(C)$ è un intorno aperto di C in $T \subset X$, di cui C è un retratto di deformazione.
Abbiamo:

$$X = A \cup B, \qquad A \cap B \sim C, \qquad A \sim T, \qquad B \sim M,$$

dove con $\sim$ intendiamo omotopicamente equivalente. In particolare

$$H_2(A) \cong \mathbf{Z}, \quad H_1(A) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \quad \widetilde{H}_0(A) = 0, \quad H_i(A) = 0 \text{ } altrimenti$$

$$H_1(B) \cong \mathbf{Z}, \quad \widetilde{H}_0(B) = 0 \quad H_i(B) = 0 \text{ } altrimenti$$

$$H_1(A \cap B) \cong \mathbf{Z}, \quad \widetilde{H}_0(A \cap B) = 0, \quad H_i(A \cap B) = 0 \text{ } altrimenti.$$

Dalla successione esatta di omologia ridotta di Mayer-Vietoris abbiamo

$$\ldots \to \widetilde{H}_i(A \cap B) \xrightarrow{(-\iota_{A*}, \iota_{B*})} \widetilde{H}_i(A) \oplus \widetilde{H}_i(B) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_i(A \cup B) \xrightarrow{\partial_i} \widetilde{H}_{i-1}(A \cap B) \to \ldots$$

dove ι_{A*} e ι_{B*} sono gli omomorfismi indotti dalle inclusioni $\iota_A\colon A \cap B \to A$ e $\iota_B\colon A \cap B \to B$, e $j_*(\sigma, \eta) = \sigma + \eta$.
L'omomorfismo cruciale è $(-\iota_{A*}, \iota_{B*})$

$$H_1(A \cap B) \cong \mathbf{Z} \to H_1(A) \oplus H_1(B) \cong (\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}$$

che sul generatore di $H_1(A \cap B)$ vale

$$1 \mapsto ((1, 0), 2).$$

Infatti il cerchio C, che è un generatore di $H_1(A\cap B)$, è anche uno dei generatori di $H_1(A)$ e due volte un generatore di $H_1(B)$. Quest'ultimo fatto si spiega osservando che $H_1(M)$ è generato dal parallelo centrale di M, che è un retratto di deformazione di M; la retrazione di ∂M sul parallelo centrale si avvolge due volte su di esso. Il fatto importante è che $(-\iota_{A*},\iota_{B*})$ è *iniettivo*.
Per $i=2$ la successione di M.-V. diventa

$$\dots 0\to \mathbf{Z}\oplus 0 \xrightarrow{j_*} H_2(X) \xrightarrow{\partial_2} H_1(A\cap B)=\mathbf{Z} \xrightarrow{(-\iota_{A*},\iota_{B*})} H_1(A)\oplus H_1(B)\dots$$

dove l'omorfismo j_* è iniettivo con immagine isomorfa a $\mathbf{Z}$ in $H_2(X)$. Inoltre, l'omomorfismo ∂_2 è identicamente nullo: dall'iniettività di $(-\iota_{A*},\iota_{B*})$ e dall'esattezza della successione abbiamo infatti $Im(\partial)=\ker((-\iota_{A*},\iota_{B*})=0$. Ne segue che

$$H_2(X)=\ker(\partial_2)=Im(j_*)\cong\mathbf{Z}.$$

Poiché A, B, $A\cap B$ sono connessi per archi, anche $X=A\cup B$ lo è; per cui $\widetilde{H}_0(A)=\widetilde{H}_0(B)=\widetilde{H}_0(A\cap B)=\widetilde{H}_0(A\cup B)=0$ e $H_0(X)=\mathbf{Z}$.
Infine, poiché $\partial_2=0$, possiamo inserire $H_1(X)$ nella successione esatta corta

$$0\to H_1(A\cap B)\to H_1(A)\oplus H_1(B)\to H_1(X)\to 0.$$

Verifichiamo che $H_1(X)\cong\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ esibendo un omomorfismo

$$f\colon \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$$

il cui nucleo coincida con l'immagine di $(-\iota_{A*},\iota_{B*})$ in $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, ossia col sottogruppo

$$\{(m,0,2m),\ m\in\mathbf{Z}\}.$$

Basta definire $f(a,b,c)=(b,2a-c)$.

(b) Si procede in modo simile al caso precedente. In questo caso

$$A\sim P^2,\qquad B\sim M,\qquad A\cap B\sim P^1\cong S^1,\qquad X=A\cup B.$$

$$H_2(A)=0,\quad H_1(A)\cong\mathbf{Z}_2,\quad \widetilde{H}_0(A)=0,\quad H_i(A)=0 \textit{ altrimenti}$$

$$H_1(B)\cong\mathbf{Z},\quad \widetilde{H}_0(B)=0\quad H_i(B)=0 \textit{ altrimenti}$$

$$H_1(A\cap B)\cong\mathbf{Z},\quad \widetilde{H}_0(A\cap B)=0,\quad H_i(A\cap B)=0 \textit{ altrimenti}.$$

Poiché tutti gli spazi sono connessi per archi, abbiamo

$$\widetilde{H}_0(A)=\widetilde{H}_0(B)=\widetilde{H}_0(A\cap B)=\widetilde{H}_0(A\cup B)=0,\qquad H_0(X)=\mathbf{Z}.$$

Anche in questo caso, l'omomorfismo cruciale è $(-\iota_{A*},\iota_{B*})$

$$H_1(A\cap B)\cong\mathbf{Z}\to H_1(A)\oplus H_1(B)\cong\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}$$

che sul generatore di $H_1(A\cap B)$ vale

$$1\mapsto(\bar{1},2).$$

Il fatto che il generatore di $H_1(A \cap B)$ vada in due volte il generatore di $H_1(B)$ si spiega esattamente come nel caso precedente. Per giustificare il fatto che il generatore di $H_1(A \cap B)$ vada in un generatore di $H_1(A)$, basta considerare la successione esatta di omologia estesa della coppia (P^2, P^1)

$$\ldots \to H_2(P^2) \to H_2(P^2, P^1) \to H_1(P^1) \to H_1(P^2) \to \widetilde{H}_0(P^1) \to \ldots$$

che si riduce a

$$\ldots 0 \to H_2(P^2, P^1) \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2 \to 0 \to \ldots$$

Il fatto importante è che $(-\iota_{A*}, \iota_{B*})$ è *iniettivo*. Ne segue che $\partial_2 = 0$. Inoltre, poiché $H_2(A) = H_2(B) = 0$, otteniamo

$$H_2(X) = \ker \partial_2 = Im(j_*) = 0.$$

Come nel caso precedente, possiamo inserire $H_1(X)$ nella successione esatta corta

$$0 \to H_1(A \cap B) \to H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(X) \to 0.$$

Verifichiamo che $H_1(X) \cong \mathbf{Z}_4$ esibendo un omomorfismo

$$f \colon \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_4$$

il cui nucleo coincida con l'immagine di $(-\iota_{A*}, \iota_{B*})$ in $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}$, ossia col sottogruppo

$$\{(\bar{m}, 2m),\ m \in \mathbf{Z}\}.$$

Basta definire $f(\bar{a}, n) = 2a - n \bmod 4$.

• *Hatcher, esercizio 31, pag.158.*
Sia $Z := X \vee Y$ e sia $x_0 \in Z$ il punto di "incollamento" con le proprietà richieste.... Fissiamo il seguente ricoprimento aperto $\{A, B\}$ di Z:
$A = X \cup N_Y(x_0)$, dove $N_Y(x_0)$ è un intorno aperto di x_0 in $Y \subset Z$, di cui x_0 è un retratto di deformazione;
$B = Y \cup N_X(x_0)$, dove $N_X(x_0)$ è un intorno aperto di x_0 in $X \subset Z$, di cui x_0 è un retratto di deformazione;
Abbiamo:

$$Z = A \cup B, \qquad A \cap B \sim \{x_0\}, \qquad A \sim X, \qquad B \sim Y,$$

dove con $\sim$ intendiamo omotopicamente equivalente. In particolare

$$\widetilde{H}_i(A \cap B) = 0, \quad \widetilde{H}_i(X) \cong \widetilde{H}_i(A) \quad \widetilde{H}_i(Y) \cong \widetilde{H}_i(B), \qquad \forall i.$$

Dalla successione esatta di omologia ridotta di Mayer-Vietoris abbiamo

$$\ldots \to 0 \xrightarrow{(-\iota_{A*}, \iota_{B*})} \widetilde{H}_i(A) \oplus \widetilde{H}_i(B) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_i(A \cup B) \xrightarrow{\partial_i} 0 \to \ldots$$

da cui

$$\widetilde{H}_i(X \vee Y) \cong \widetilde{H}_i(X) \oplus \widetilde{H}_i(Y), \qquad \forall i.$$