1. *Sia X uno spazio e sia $x_0 \in X$. Dimostrare che $H_n(X,x_0) \cong \widetilde{H}_n(X)$, per ogni n (vedi anche Hatcher, Esempi 2.18, pag.118).*

2. *Hatcher, Esercizi 15, 16, 17, pag. 132.*

Sol.: Hatcher, Esercizio 15: Sia data la successione esatta

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E.$$

• Verifichiamo l'implicazione $\begin{cases} \alpha \textit{ suriettiva} \\ \delta \textit{ iniettiva} \end{cases} \Rightarrow \quad C = 0.$

Poiché α è suriettiva, per l'esattezza della successione, vale $B = Im(\alpha) = \ker(\beta)$. Da cui $\beta \equiv 0$. Inoltre $0 = Im(\beta) = \ker(\gamma)$ implica γ iniettiva. Poiché δ è iniettiva, per l'esattezza della successione, vale $0 = \ker\delta = Im(\gamma)$. Pertanto $\gamma \equiv 0$. L'applicazione γ puó essere simultaneamente identicamente nulla e iniettiva solo se $C = 0$.

• Verifichiamo l'implicazione $\quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha \textit{ suriettiva} \\ \delta \textit{ iniettiva.} \end{cases}$

Se $C = 0$, allora $0 = Im(\beta) = \ker\gamma = Im(\gamma) = \ker\delta$. Dunque δ è iniettiva. Inoltre $0 = Im(\beta)$ implica $B = \ker\beta = Im(\alpha)$, cioè α suriettiva.

Hatcher, Esercizio 16:
(a) Consideriamo il tratto della successione di omologia della coppia (X,A)

$$\ldots \to H_1(X,A) \to H_0(A) \xrightarrow{\iota_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X,A) \xrightarrow{\delta_0} 0$$

L'ipotesi $H_0(X,A) = 0$ implica $\begin{cases} Im(j_*) = 0 \\ \ker j_* = H_0(X) = Im(i_*); \end{cases}$ in particolare i_* è suriettiva.

Resta da verificare che geometricamente $i_*\colon H_0(A) \to H_0(X)$ suriettiva equivale al fatto che A incontra tutte le componenti connesse per archi di X.

Sia Z uno spazio topologico. Il gruppo $H_0(Z)$ è la somma diretta di tante copie di $\mathbf{Z}$ quante sono le componenti connesse per archi di Z. Supponiamo che Z sia connesso per archi. Fissare un punto $z_0 \in Z$ determina un isomorfismo $\phi\colon H_0(Z) \to \mathbf{Z}$. Con un abuso di linguaggio pensiamo ad una 0-catena come a una somma pesata di punti di Z, cioè della forma

$$\sum_i m_i z_i, \qquad m_i \in \mathbf{Z}, \quad z_i \in \mathbf{Z}.$$

Osserviamo che $C_0(Z) = Z_0(Z)$ (perché $\partial_0 \equiv 0$ su $C_0(Z)$). Ogni elemento di $C_0(Z)$ si scrive come

$$\sum_i m_i z_i = \sum_i m_i(z_i - z_0) + (\sum_i m_i) z_0, \tag{1}$$

dove $z_i - z_0 = \partial_1 \sigma_i^1$, con $\sigma_i^1\colon [v_0 v_1] \to Z$ una 1-catena che soddisfa $\sigma_i^1(v_0) = z_0$ e $\sigma_i^1(v_1) = z_i$. Poiché Z è connesso per archi, le 1-catene σ_i^1 esistono. La (1) dice che ogni elemento di $H_0(Z)$ è omologo ad un elemento di $\mathbf{Z} z_0$ e l'isomorfismo cercato è dato da

$$\sum_i m_i(z_i - z_0) + (\sum_i m_i) z_0 \longrightarrow \sum_i m_i.$$

Tornando al nostro caso, sia X_α una componente connessa per archi di X. Se (e solo se) X_α contiene almeno una componente connessa A_0 di A, allora l'inclusione $A \cap X_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ induce un omomorfismo suriettivo

$$H_0(A \cap X_\alpha) \to H_0(X_\alpha), \quad m z_0 \mapsto m z_0, \qquad z_0 \in A_0 \cap X_\alpha.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per le altre componenti connesse di X, si ottiene la tesi.

(b)
• Dalla successione di omologia della coppia (X, A)

$$\ldots \to H_1(A) \xrightarrow{\iota_*} H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \xrightarrow{\delta} H_0(A) \xrightarrow{\iota_*} H_0(X) \to \ldots$$

e dall'esercizio precedente, abbiamo che la condizione $H_1(X, A) = 0$ è equivalente a

$$\begin{cases} \iota_*\colon H_1(A) \to H_1(X) \text{ } \textit{suriettiva} \\ \iota_*\colon H_0(A) \to H_0(X) \text{ } \textit{iniettiva.} \end{cases}$$

Resta da verificare che geometricamente $\iota_*\colon H_0(A) \to H_0(X)$ iniettiva equivale al fatto che ogni componente connessa di X contiene al più una componente connessa di A.
Sia X_α una delle componenti connesse per archi di X e siano $z_1, \ldots z_k \in A \cap X_\alpha$ "generatori" di $H_0(A \cap X_\alpha)$, nel senso che $H_0(A \cap X_\alpha) \cong \mathbf{Z} z_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z} z_k$. In questo caso l'omomorfismo

$$H_0(A \cap X_\alpha) \cong \mathbf{Z} z_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z} z_k \longrightarrow H_0(X_\alpha) \cong \mathbf{Z} z_1,$$

indotto dall'inclusione $A \cap X_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ è iniettivo se e solo se $k = 1$: se $k > 1$, catene che non sono omologhe in $A \cap X_\alpha$ diventano omologhe in X_α.

Hatcher, Esercizio 17: Vedi Soluzioni Esercizi8 2012-13, n. 5.