1. *Esibire, se esistono, omomorfismi tali che la successione data sia esatta*

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_8 \longrightarrow 0; \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0; \tag{2}$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0; \tag{3}$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_4 \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Sol.:
(1) le seguenti f & g soddisfano le condizioni richieste:
$f\colon \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8$, $\quad \bar{x} \mapsto (\bar{x}, 0)$ è iniettiva;
$g\colon \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \to \mathbf{Z}_8$, $\quad (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{y})$ è suriettiva;
$\ker g = Im(f)$.

(2) le seguenti f & g soddisfano le condizioni richieste:
$f\colon \mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8$, $\quad \bar{x} \mapsto (0, 2\bar{x})$ è iniettiva;
$g\colon \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \to \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$, $\quad (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x}, \bar{y} \pmod 2)$ è suriettiva;
$\ker g = Im(f)$.

(3) una succesione esatta di questo tipo non esiste:
- tutti gli elementi diversi da $(\bar{0}, \bar{0})$ in $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ hanno ordine due.
- $\ker g$ contiene elementi di ordine quattro: ad esempio $(\bar{0}, \bar{2})$ ha ordine quattro in $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_8$ e

$$g((\bar{0}, \bar{2})) = g(2(\bar{0}, \bar{1})) = 2g(\bar{0}, \bar{1})) = (\bar{0}, \bar{0}) \in \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2.$$

- per l'esattezza della successione, $\ker g = Im(f) \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. Contraddizione.

(4) le seguenti f & g soddisfano le condizioni richieste:
$f\colon \mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8$, $\quad \bar{x} \mapsto (\bar{x} \pmod 2, 2\bar{x})$ è iniettiva;
$g\colon \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8 \to \mathbf{Z}_4$, $\quad g(\bar{x}, \bar{y}) := 2\bar{x} - \bar{y} \pmod 4$ è suriettiva;
$\ker(g) = Im(f)$.
Per costruire f: sia $\bar{1}$ il generatore di $\mathbf{Z}_4$. Poiché f deve essere iniettiva, $f(\bar{1})$ deve essere un elemento di ordine quattro in $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_8$. Quindi $f(\bar{1}) = (\bar{x}, \bar{y})$, con $\bar{y}$ di ordine 4 in $\mathbf{Z}_8$, cioè $\bar{y} = \bar{2}$ oppure $\bar{y} = \bar{6}$. Ponendo ad esempio $f(\bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2})$, abbiamo che $f(\mathbf{Z}_4) = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{6})\}$.

2. *Considerare la successione di gruppi abeliani*

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$

di Hatcher, Thm 2.16, pag.117. Dimostrare che $\ker(j_*) = \mathrm{Im}(i_*)$.

3. *Sia X uno spazio topologico. Si chiama complesso di catene esteso il complesso*

$$\ldots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \ldots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

ottenuto dal complesso delle catene singolari di X mediante la mappa

$$\epsilon\colon C_0(X) \to \mathbf{Z}, \quad \sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha^0 \mapsto \sum_\alpha n_\alpha.$$

I gruppi di omologia di questo complesso si chiamano gruppi di omologia ridotta di X e si indicano con $\widetilde{H}_n(X)$. Per $n \geq 0$, calcolare $\widetilde{H}_n(X)$, dove X è uno spazio connesso per archi. Calcolare $\widetilde{H}_0(X)$ quando X è formato da N componenti connesse per archi.

Sol.:

Nella pagina del corso di Topologia Algebrica 2012-13, trovate le soluzioni dei seguenti esercizi (vedi Esercizi 7).

1. Considerare la successione di gruppi abeliani

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$

di Hatcher, Thm 2.16, pag.117. Dimostrare che $\ker(i_*) = \mathrm{Im}(\partial)$.

2. Verificare che i gruppi di *omologia ridotta* (ottenuti dal complesso delle catene singolari *esteso*) di un punto sono tutti nulli.

3. Sia X uno spazio non vuoto. Verificare che $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbf{Z}$.

5. Nel seguente diagramma commutativo le due righe sono esatte

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle h} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

(a) Dimostrare che se f è suriettiva e g è iniettiva, allora h è iniettiva.
(b) Dimostrare che se g è suriettiva e h è iniettiva, allora f è suriettiva.

6. Siano A, B, C, D, A', B', C' e D' gruppi abeliani. Nel seguente diagramma commutativo le due righe sono esatte

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \xrightarrow{\chi} & D \\
\big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle h} & & \big\downarrow{\scriptstyle k} \\
A' & \xrightarrow{\phi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \xrightarrow{\chi'} & D'.
\end{array}$$

Dimostrare che se f è suriettiva e g e k sono iniettive, allora h è iniettiva.

7. Sia

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow 0$$

una successione esatta di gruppi abeliani finiti. Dimostrare che $\prod_{i=1}^n \#A_i^{(-1)^i} = 1$.