Topologia Algebrica 2013-14. Esercizi 1. Omologia simpliciale.

1. Hatcher, pag.131: Esercizi 2, 3, 5.

Sol.: Hatcher, Esercizio 2, pag.131. Schiacciamo l'unione delle due facce $[v_0v_1v_2] \cup [v_1v_2v_3]$ sull'unione delle due facce $[v_0v_1v_3] \cup [v_0v_2v_3]$. Alla fine ci resta il quadrilatero di vertici $[v_0v_2v_3v_1]$ con le identificazioni $[v_0v_1] \sim [v_1v_3]$ e $[v_0v_2] \sim [v_2v_3]$, che rappresenta la $\mathbf{P}^2\#\mathbf{P}^2$, ossia la bottiglia di Klein.
Ragionando alla stessa maniera vediamo che per ottenere il toro T le identificazioni da fare sono $[v_0v_1] \sim [v_2v_3]$ e $[v_0v_2] \sim [v_1v_3]$, mentre per ottenere la sfera S^2 le identificazoni da fare sono $[v_0v_1] \sim [v_0v_2]$ e $[v_2v_3] \sim [v_1v_3]$.

Sol.: Hatcher, Esercizio 3, pag.131.

Sol.: Hatcher, Esercizio 5, pag.131. Consideriamo ad esempio la *Delta*-struttura data nella figura qui sotto.

Abbiamo

$$C_0(X) = \mathbf{Z}P, \quad C_1(X) = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}c, \quad C_2(X) = \mathbf{Z}A \oplus \mathbf{Z}B, \qquad C_i(X) = 0, \quad i \neq 0,1,2.$$

Inoltre

$$\partial_0 = \partial_1 = 0, \quad \partial_2(A) = a + b - c, \quad \partial_2(B) = c - a + b, \qquad \partial_i = 0, \quad i \neq 2,$$

da cui segue

$$H_0(X) = C_0(X) \cong \mathbf{Z}P, \quad H_2(X) = \ker \partial_2 / Im(\partial_3) = 0,$$
$$H_1(X) = \ker \partial_1 / Im(\partial_2) = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}c / \mathbf{Z}(a + b - c) \oplus \mathbf{Z}(c - a + b).$$

Per calcolare esplicitamente quest'ultimo quoziente, scegliamo nuovi generatori dei due gruppi, facendo attenzione che il cambiamento di generatori sia dato da una matrice a coefficienti interi con determinante ± 1. Ad esempio

$$\mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}c = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}(a + b - c), \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

e

$$\mathbf{Z}(a+b-c) \oplus \mathbf{Z}(c-a+b) = \mathbf{Z}(a+b-c) \oplus \mathbf{Z}((a+b-c)+(c-a+b)) = \mathbf{Z}(a+b-c) \oplus \mathbf{Z}2b, \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Adesso risulta evidente che

$$H_1(X) = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}(a + b - c) / \mathbf{Z}2b \oplus \mathbf{Z}(a + b - c) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2.$$

Sulla pagina web del corso di Topologia Algebrica 2012-13, trovate le soluzioni dei seguenti esercizi (vedi Esercizi6).

1. Hatcher, pag.131: Esercizi 1, 4, 6 (solo per n=0,1,2), 11.

2. Calcolare l'omologia simpliciale di $T\#T$ con la struttura di Δ-complesso descritta nella figura a pag. 102 dell'Hatcher.