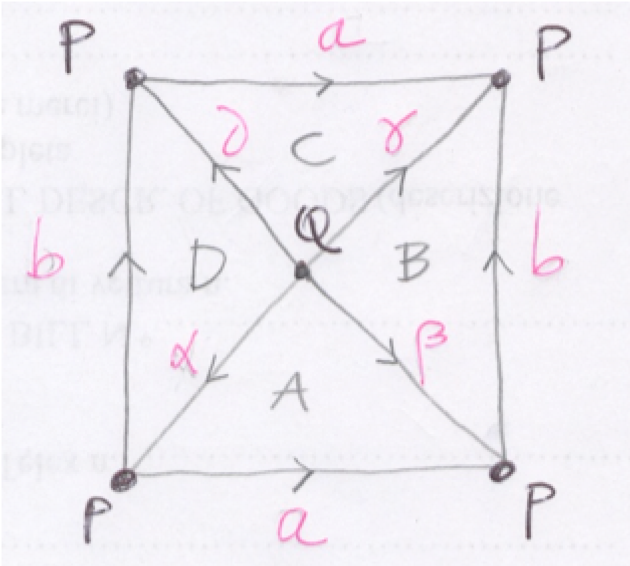
1. Consideramo il toro $X = T$, con la struttura di Δ-complesso data da



Abbiamo

$$C_0(X) = \mathbf{Z}P \oplus \mathbf{Z}Q;$$

$$C_1(X) = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}\alpha \oplus \mathbf{Z}\beta \oplus \mathbf{Z}\gamma \oplus \mathbf{Z}\delta;$$

$$C_2(X) = \mathbf{Z}A \oplus \mathbf{Z}B \oplus \mathbf{Z}C \oplus \mathbf{Z}D.$$

$\partial_0 \equiv 0$;
$\partial_3 \equiv 0$, perché non ci sono celle di dimensione tre;

• L'omomorfismo ∂_1.
$\partial_1(a) = \partial_1(b) = P - P = 0$;
$\partial_1(\alpha) = \partial_1(\beta) = \partial_1(\gamma) = \partial_1(\delta) = P - Q$.
L'immagine di ∂_1 è data da

$$\partial_1 C_1(X) = \mathbf{Z}(P - Q).$$

Se $W = xa + yb + z\alpha + u\beta + v\gamma + w\delta \in C_1(X)$, si ha che

$$\partial_1(W) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z + u + v + w = 0.$$

Ne segue che

$$\ker \partial_1 = \langle a, b, \alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \delta \rangle$$

è un gruppo libero di rango 5, e gli elementi $a, b, \alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \delta$ sono generatori indipendenti di $\ker \partial_1$ (non unici!).

• L'omomorfismo ∂_2.
Abbiamo

$\partial_2(A) = \alpha + a - \beta, \quad \partial_2(B) = \beta + b - \gamma, \quad \partial_2(C) = \gamma - a - \delta, \quad \partial_2(D) = \delta - b - \alpha;$
posto $Z = xA + yB + zC + uD \in C_2(X)$, risolvendo un sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{Z}$, si verifica facilmente che

$$\ker \partial_2 = Z(A + B + C + D) \cong \mathbf{Z}.$$

Poiché come generatori di $C_2(X)$ si possono anche prendere $A, B, C, A+B+C+D$ (basta verificare che la matrice del cambiamento di base è una matrice a coefficienti in $\mathbf{Z}$, con determinate uguale a ± 1. Solo cosí, anche l'inversa ha coefficienti interi), si ha

$$\partial_2 C_2(X) = \langle \partial_2(A), \partial_2(B), \partial_2(C) \rangle.$$

Calcoliamo adesso i gruppi di omologia:
$H_2(X) = \ker \partial_2 / Im(\partial_3) \cong \mathbf{Z}$;
$H_0(X) = \ker \partial_0 / Im(\partial_1) = C_0(X)/Im(\partial_1) = \mathbf{Z}P \oplus \mathbf{Z}Q/\mathbf{Z}(P-Q) = \mathbf{Z}P \oplus \mathbf{Z}(P-Q)/\mathbf{Z}(P-Q) \cong Z;$
$H_1(X) = \ker \partial_1 / Im(\partial_2) = \langle a, b, \alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \delta \rangle / \langle \partial_2(A), \partial_2(B), \partial_2(C) \rangle;$
Osserviamo che come generatori di $\ker \partial_1$ possiamo anche prendere

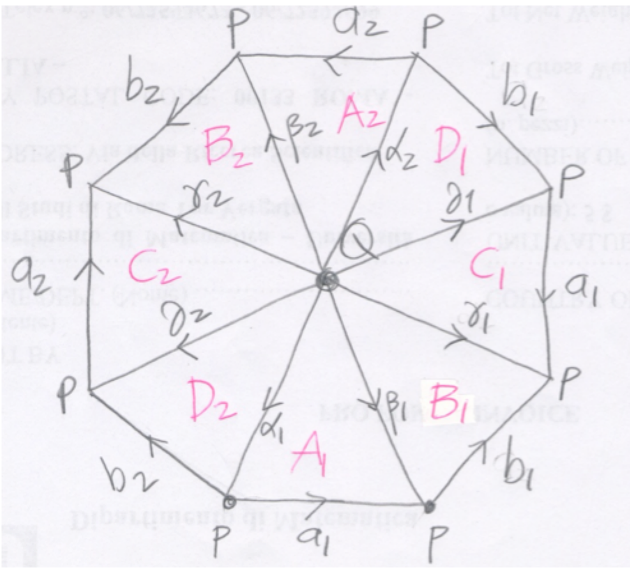
$$a, b, a + (\alpha - \beta), b + (\beta - \gamma), -a + (\gamma - \delta),$$

in quanto la matrice del cambiamento di base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha infatti determinante uguale a 1.
A questo punto è facile vedere che
$H_1(X) = \langle a, b, a + (\alpha - \beta), b + (\beta - \gamma), -a + (\gamma - \delta) \rangle / \langle a + (\alpha - \beta), b + (\beta - \gamma), -a + (\gamma - \delta) \rangle \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$

2. Consideriamo adesso $X = T\#T$ la somma connessa di due tori, con la struttura di Δ-complesso data da



Abbiamo
$$C_0(X) = \mathbf{Z}P \oplus \mathbf{Z}Q;$$
$$C_1(X) = \bigoplus_{i=1,2} \mathbf{Z}a_i \oplus \mathbf{Z}b_i \oplus \mathbf{Z}\alpha_i \oplus \mathbf{Z}\beta_i \oplus \mathbf{Z}\gamma_i \oplus \mathbf{Z}\delta_i;$$
$$C_2(X) = \bigoplus_{i=1,2} \mathbf{Z}A_i \oplus \mathbf{Z}B_i \oplus \mathbf{Z}C_i \oplus \mathbf{Z}D_i.$$

$\partial_0 \equiv 0$;
$\partial_3 \equiv 0$, perché non ci sono celle di dimensione tre;

• L'omomorfismo ∂_1.
$\partial_1(a_i) = \partial_1(b_i) = P - P = 0$, per $i = 1, 2$;
$\partial_1(\alpha_i) = \partial_1(\beta_i) = \partial_1(\gamma_i) = \partial_1(\delta_i) = P - Q$, per $i = 1, 2$.
L'immagine di ∂_1 è data da
$$\partial_1 C_1(X) = \mathbf{Z}(P - Q).$$
Se $W = \sum_{i=1,2} x_i a_i + y_i b_i + z_i\alpha_i + u_i\beta_i + v_i\gamma_i + w_i\delta_i \in C_1(X)$, si ha che
$$\partial_1(W) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1,2} z_i + u_i + v_i + w_i = 0.$$
Ne segue che $\ker \partial_1$ è il gruppo abeliano libero di rango 11, di generatori
$$\ker \partial_1 = \langle a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \beta_1, \beta_1 - \beta_2, \beta_2 - \gamma_1, \gamma_1 - \gamma_2, \gamma_2 - \delta_1, \delta_1 - \delta_2\rangle.$$

• L'omomorfismo ∂_2.
Abbiamo
$\partial_2(A_1) = \alpha_1 + a_1 - \beta_1$, $\quad \partial_2(B_1) = \beta_1 + b_1 - \gamma_1$, $\quad \partial_2(C_1) = \gamma_1 - a_1 - \delta_1$, $\quad \partial_2(D_1) = \delta_1 - b_1 - \alpha_2$;
$\partial_2(A_2) = \alpha_2 + a_2 - \beta_2$, $\quad \partial_2(B_2) = \beta_2 + b_2 - \gamma_2$, $\quad \partial_2(C_2) = \gamma_2 - a_2 - \delta_2$, $\quad \partial_2(D_2) = \delta_2 - b_2 - \alpha_1$.

Posto $W = \sum_{i=1,2} x_iA_i + y_iB_i + z_iC_i + u_iD_i \in C_2(X)$, si verifica che
$$\partial_2(W) = a_1(x_1-z_1)+a_2(x_2-z_2)+b_1(y_1-u_1)+b_2(y_2-u_2)+\alpha_1(x_1-u_2)+\alpha_2(-u_1+x_2)+\beta_1(y_1-x_1)+$$
$$+\beta_2(-x_2 + y_2) + \gamma_1(-y_1 + z_1) + \gamma_2(-y_2 + z_2) + \delta_1(u_1 - z_1) + \delta_2(u_2 - z_2).$$
Adesso, risolvendo un sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{Z}$, si trova che
$$\ker \partial_2 = \mathbf{Z} \bigoplus_{i=1,2} (A_i + B_i + C_i + D_i) \cong \mathbf{Z}.$$

Poiché come generatori di $C_2(X)$ si possono anche prendere
$$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, \sum_{i=1,2} A_i + B_i + C_i + D_i$$

(basta verificare che la matrice del cambiamento di base è una matrice a coefficienti in $\mathbf{Z}$, con determinante uguale a ± 1), si ha che

$$\partial_2 C_2(X) = \langle \partial_2(A_i), \partial_2(B_i), \partial_2(C_i), \partial_2(D_1) \rangle,$$

cioè $\partial_2 C_2(X)$ è un gruppo abeliano libero di rango 7.

Calcoliamo adesso i gruppi di omologia:
$H_2(X) = \ker \partial_2 / Im(\partial_3) \cong \mathbf{Z}$;
$H_0(X) = \ker \partial_0 / Im(\partial_1) = C_0(X)/Im(\partial_1) = \mathbf{Z}P \oplus \mathbf{Z}Q/\mathbf{Z}(P-Q) = \mathbf{Z}P \oplus \mathbf{Z}(P-Q)/\mathbf{Z}(P-Q) \cong Z$;

$$H_1(X) = \ker \partial_1 / Im(\partial_2) =$$

$$= \langle a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \beta_1, \beta_1 - \beta_2, \beta_2 - \gamma_1, \gamma_1 - \gamma_2, \gamma_2 - \delta_1, \delta_1 - \delta_2 \rangle / \langle \partial_2(A_i), \partial_2(B_i), \partial_2(C_i), \partial_2(D_1) \rangle;$$

Osserviamo che come generatori di $\ker \partial_1$ possiamo anche prendere

$$a_1, a_2, b_1, b_2, \partial_2(A_1), \partial_2(A_2), \partial_2(B_1), \partial_2(B_2), \partial_2(C_1), \partial_2(C_2), \partial_2(D_1),$$

in quanto la matrice del cambiamento di base corrispondente

$$\begin{pmatrix} I_4 & * \\ O & M \end{pmatrix},$$

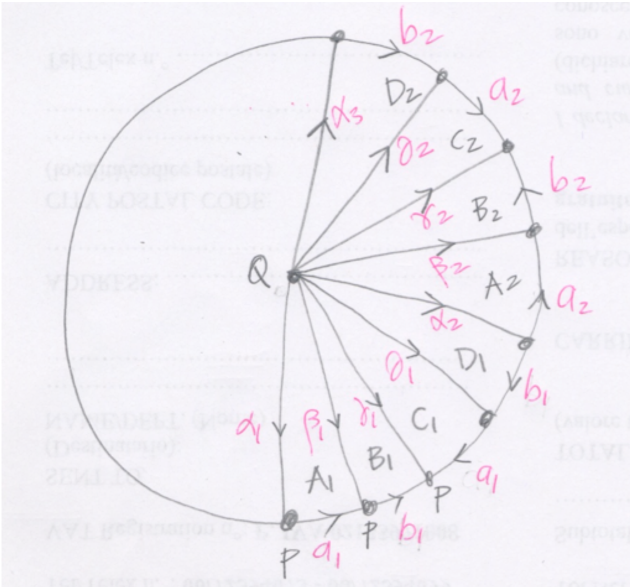
con

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a -1.
A questo punto è facile vedere che

$$H_1(X) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$$

3. Generalizzando il metodo illustrato nell'esempio precedente, si calcola l'omologia simpliciale della superficie compatta orientabile data dalla somma connessa di n tori $X = T\# \ldots \#T$, con la struttura di Δ-complesso qui sotto



Abbiamo

$$C_0(X) = \mathbf{Z}P \oplus \mathbf{Z}Q;$$

$$C_1(X) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Z}a_i \oplus \mathbf{Z}b_i \oplus \mathbf{Z}\alpha_i \oplus \mathbf{Z}\beta_i \oplus \mathbf{Z}\gamma_i \oplus \mathbf{Z}\delta_i;$$

$$C_2(X) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Z}A_i \oplus \mathbf{Z}B_i \oplus \mathbf{Z}C_i \oplus \mathbf{Z}D_i.$$

$\partial_0 \equiv 0$;
$\partial_3 \equiv 0$, perché non ci sono celle di dimensione tre;

• L'omomorfismo ∂_1.
$\partial_1(a_i) = \partial_1(b_i) = P - P = 0$, per $i = 1, 2$;
$\partial_1(\alpha_i) = \partial_1(\beta_i) = \partial_1(\gamma_i) = \partial_1(\delta_i) = P - Q$, per $i = 1, 2$.
L'immagine di ∂_1 è data da

$$\partial_1 C_1(X) = \mathbf{Z}(P - Q).$$

Se $W = \sum_{i=}^{n} x_i a_i + y_i b_i + z_i \alpha_i + u_i \beta_i + v_i \gamma_i + w_i \delta_i \in C_1(X)$, si ha che

$$\partial_1(W) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} z_i + u_i + v_i + w_i = 0.$$

Ne segue che $\ker \partial_1$ è il gruppo abeliano libero di rango $2n + 4n - 1 = 6n - 1$, di generatori

$$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} - \alpha_n,$$

$$\alpha_n - \beta_1, \beta_1 - \beta_2, \ldots, \beta_n - \gamma_1, \gamma_1 - \gamma_2, \ldots, \gamma_n - \delta_1, \delta_1 - \delta_2, \ldots, \delta_{n-1} - \delta_n.$$

• L'omomorfismo ∂_2.

Abbiamo

$\partial_2(A_1) = \alpha_1 + a_1 - \beta_1, \quad \partial_2(B_1) = \beta_1 + b_1 - \gamma_1, \quad \partial_2(C_1) = \gamma_1 - a_1 - \delta_1, \quad \partial_2(D_1) = \delta_1 - b_1 - \alpha_2;$

$\partial_2(A_i) = \alpha_i + a_i - \beta_i, \quad \partial_2(B_i) = \beta_i + b_i - \gamma_i, \quad \partial_2(C_1) = \gamma_i - a_i - \delta_i, \quad \partial_2(D_i) = \delta_i - b_i - \alpha_{i+1};$

$\partial_2(A_n) = \alpha_n + a_n - \beta_n, \quad \partial_2(B_n) = \beta_n + b_n - \gamma_n, \quad \partial_2(C_n) = \gamma_n - a_n - \delta_n, \quad \partial_2(D_n) = \delta_n - b_n - \alpha_1.$

Posto $W = \sum_{i=1}^n x_i A_i + y_i B_i + z_i C_i + u_i D_i \in C_2(X)$, risolvendo un sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{Z}$, si trova che

$$\ker \partial_2 = \mathbf{Z} \bigoplus_{i=1}^{n} (A_i + B_i + C_i + D_i) \cong \mathbf{Z}.$$

Poiché come generatori di $C_2(X)$ si possono anche prendere

$$A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n, D_1, \ldots, D_{n-1}, \sum_{i=1}^{n} A_i + B_i + C_i + D_i$$

(basta osservare che la matrice del cambiamento di base è una matrice a coefficienti in $\mathbf{Z}$, con determinante uguale a ± 1), si ha che

$$\partial_2 C_2(X) = \langle \partial_2(A_1), \ldots, \partial_2(A_n), \partial_2(B_1), \ldots, \partial_2(B_n), \partial_2(C_1), \ldots, \partial_2(C_n), \partial_2(D_1), \ldots, \partial_2(D_{n-1}) \rangle,$$

cioè $\partial_2 C_2(X)$ è un gruppo abeliano libero di rango $4n - 1$.

Calcoliamo adesso i gruppi di omologia:
$H_2(X) = \ker \partial_2 / Im(\partial_3) \cong \mathbf{Z}$;
$H_0(X) = \ker \partial_0 / Im(\partial_1) = C_0(X)/Im(\partial_1) = \mathbf{Z}P \oplus \mathbf{Z}Q / \mathbf{Z}(P - Q) = \mathbf{Z}P \oplus \mathbf{Z}(P - Q)/\mathbf{Z}(P - Q) \cong Z;$

Per calcolare $H_1(X) = \ker \partial_1 / Im(\partial_2)$, osserviamo che come generatori di $\ker \partial_1$ possiamo anche prendere

$$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \partial_2(A_1), \ldots, \partial_2(A_n), \partial_2(B_1), \ldots, \partial_2(B_n), \partial_2(C_1), \ldots, \partial_2(C_n), \partial_2(D_1), \ldots, \partial_2(D_{n-1}).$$

(anche questa volta il cambiamento di base è dato da una matrice con determinante $\pm 1 : \ \ldots$)

A questo punto è facile vedere che

$$H_1(X) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}^{2n}.$$