

1. Determinare tutti i rivestimenti di S^1 . Verificare che sono normali e per ognuno di essi determinare il gruppo degli automorfismi di rivestimento (deck-transformations).
2. Determinare tutti i rivestimenti del toro $T = S^1 \times S^1$ e del cilindro $C = S^1 \times \mathbf{R}$. Verificare che sono normali e per ognuno di essi determinare il gruppo degli automorfismi di rivestimento (deck-transformations).
3. Determinare tutti i rivestimenti di $\mathbf{R}P^n$, per $n \geq 1$. Verificare che sono normali e per ognuno di essi determinare il gruppo degli automorfismi di rivestimento (deck-transformations).
4. Hatcher, esercizio 16, pag. 80.
 - (a) Usare il risultato dell'esercizio per dimostrare che il rivestimento semplicemente connesso di uno spazio X è un rivestimento di ogni altro rivestimento di X (da cui il nome di *rivestimento universale*).
 - (b) Sia X uno spazio che ammette un rivestimento universale. Se (X_1, p_1) è un rivestimento di X e (X_2, p_2) è un rivestimento di X_1 , allora $(X_2, p_1 p_2)$ è un rivestimento di X .
5. Determinare il rivestimento universale di $\mathbf{C}^*$. Determinare gli automorfismi del rivestimento $p: \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$, dato da $z \mapsto z^n$.
6. (Massey, es. 2.4, pag.123. (*non immediato*)) Siano X e Y spazi connessi per archi, localmente connessi per archi, X compatto di Hausdorff. Sia $f: X \rightarrow Y$ un omeomorfismo locale. Allora $f: X \rightarrow Y$ è un rivestimento.
7. Hatcher, esercizio 17, pag. 80.
8. Sia X uno spazio che ammette rivestimento universale e sia $x_0 \in X$. Siano $H \subset K$ sottogruppi di $\Pi_1(X, x_0)$ e siano

$$p_H: (\tilde{X}_H, \tilde{x}_H) \rightarrow (X, x_0), \quad p_K: (\tilde{X}_K, \tilde{x}_K) \rightarrow (X, x_0)$$

i rivestimenti che soddisfano rispettivamente le condizioni

$$p_{H*} \Pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_H) = H, \quad p_{K*} \Pi_1(\tilde{X}_K, \tilde{x}_K) = K.$$

Allora esiste un'unica mappa continua

$$p_{HK}: (\tilde{X}_H, \tilde{x}_H) \rightarrow (\tilde{X}_K, \tilde{x}_K) \quad (*)$$

compatibile con le proiezioni su X . La mappa p_{HK} è una mappa di rivestimento. *Questo dice che alle inclusioni di gruppi*

$$\{e\} \subset H \subset K \subset G$$

corrispondono rivestimenti

$$(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\tilde{X}_H, \tilde{x}_H) \rightarrow (\tilde{X}_K, \tilde{x}_K) \rightarrow (X, x_0).$$

Se H è un sottogruppo normale di K , allora $(*)$ è un rivestimento normale con gruppo di automorfismi isomorfo a K/H . (Suggerimento: Se $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x_0)$ è il rivestimento universale, allora $X \cong \tilde{X}/G$, con $G \cong \Pi_1(X, x_0)$ gruppo degli automorfismi di rivestimento).