1. Studiare la dimostrazione del punto (g), Hatcher, pag.134.

2. Studiare la dimostrazione del Teorema 2.28, Hatcher, pag.135: *le sfere di dimensione pari non si possono pettinare* (ne riparleremo in classe).

3. Hatcher, Esercizio 2, pag.155.

*Sol.:* Sia $f\colon S^{2n} \to S^{2n}$ un'applicazione continua.
Se $f$ non ha punti fissi in $S^{2n}$, è omotopa alla mappa antipodale ed ha quindi grado $d = (-1)^{2n+1} = -1$ (vedi (g), pag. 134). Di conseguenza, se $f$ ha grado $d \neq -1$, ha necessariamente un punto fisso in $S^{2n}$, ossia esiste $x \in S^{2n}$ con $f(x) = x$.
Supponiamo adesso che $f$ abbia grado $d = -1$ e consideriamo $-f\colon S^{2n} \to S^{2n}$. Chiaramente $-f$ è ben definita: è data infatti dalla composizione $-f = a \circ f$, con $a\colon S^{2n} \to S^{2n}$ la mappa antipodale. In particolare, $-f$ ha grado $d = 1$ (il grado è moltiplicativo) ed ha quindi un punto fisso. In altre parole, esiste $x \in S^{2n}$ con $f(x) = -x$.

Sia adesso $g\colon \mathbf{RP}^{2n} \to \mathbf{RP}^{2n}$ un'applicazione continua. Ricordiamo che $S^{2n}$ è il rivestimento universale di $\mathbf{RP}^{2n}$ e che la proiezione $\pi\colon S^{2n} \to \mathbf{RP}^{2n}$ identifica un punto di $S^{2n}$ con il suo antipodale. Mostriamo che la mappa $g$ si solleva ad un'applicazione continua $\tilde{g}\colon S^{2n} \to S^{2n}$: definiamo innanzitutto $\hat{g}\colon S^{2n} \to \mathbf{RP}^{2n}$ mediante $\hat{g}(x) := g(\pi(x))$, $x \in S^{2n}$. Adesso siamo nelle ipotesi della Proposizione 1.33, in Hatcher, pag.61:

$$\begin{tikzcd} & S^{2n} \arrow[d, "\pi"] \\ S^{2n} \arrow[ur, "\tilde{g}"] \arrow[r, "\hat{g}"] & \mathbf{RP}^{2n}. \end{tikzcd}$$

Poiché la sfera $S^{2n}$ è semplicemente connessa, esiste un sollevamento $\tilde{g}\colon S^{2n} \to S^{2n}$ di $\hat{g}$ tale che $\pi \circ \tilde{g} = \hat{g}$. In particolare, il diagramma

$$\begin{tikzcd} S^{2n} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\pi"] & S^{2n} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{RP}^{2n} \arrow[r, "g"] & \mathbf{RP}^{2n} \end{tikzcd}$$

è commutativo: $\pi \circ \tilde{g} = g \circ \pi$. Per quanto detto all'inizio, esiste $x \in S^{2n}$ per cui vale $\tilde{g}(x) = x$ oppure $\tilde{g}(x) = -x$. Dunque $g$ ha un punto fisso in $\mathbf{RP}^{2n}$.

Sia $f\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ un'applicazione lineare. Chiaramente $f$ manda rette per l'origine in rette per l'origine, e quindi determina un'applicazione $\bar{f}\colon \mathbf{RP}^{2n-1} \to \mathbf{RP}^{2n-1}$. Ma se il suo polinomio caratteristico non ha radici reali (e questo può succedere perché $2n$ è pari), nessuna retta per l'origine è mandata in sè da $f$. Ne segue che l'applicazione $\bar{f}$ non ha punti fissi.

4.

5.