1. *Sia X uno spazio e sia $x_0 \in X$. Dimostrare che $H_n(X,x_0) \cong \widetilde{H}_n(X)$, per ogni n (vedi anche Hatcher, Esempio 2.18, pag.118).*

Sol.: Dalla successione esatta di omologia ridotta della coppia (X,x_0) (con gli omomorfismi soliti, indotti da inclusione, quoziente etc...)

$$\ldots \to H_n(x_0) \to H_n(X) \to H_n(X,x_0) \to H_{n-1}(x_0) \to \ldots$$

$$\ldots \to H_1(x_0) \to H_1(X) \to H_1(X,x_0) \to \widetilde{H}_0(x_0) \to \widetilde{H}_0(X) \to H_0(X,x_0) \to 0$$

e dal fatto che $\widetilde{H}_n(x_0) = 0$, per ogni n, otteniamo

$$\widetilde{H}_n(X) \cong \widetilde{H}_n(X,x_0), \quad \forall n.$$

L'omologia ridotta della coppia coincide con l'omologia standard della coppia, per cui

$$\widetilde{H}_n(X) \cong H_n(X,x_0), \quad \forall n.$$

2. *(vedi Hatcher, pag.125, in alto). Siano X uno spazio ed $A \subset X$ un sottospazio. Sia CA il cono su A, ossia il quoziente $(A \times [0,1])/(A \times \{0\})$. Infine, sia $X \cup CA$ lo spazio ottenuto incollando $A \times \{0\} \subset CA$ ad X lungo A. Verificare che $H_n(X,A) \cong \widetilde{H}_n(X \cup CA, CA)$, per ogni n. Osservare che la Proposizione 2.22, pag. 124,* **non** *vale per coppie arbitrarie (X,A).*

Sol.: Il cono CA è omotopicamente equivalente ad un punto, per cui $\widetilde{H}_n(CA) \cong \widetilde{H}_n(p) = 0$, per ogni n. Da ciò e dalla successione esatta di omologia ridotta della coppia $(X \cup CA, CA)$ (con gli omomorfismi soliti, indotti da inclusione, quoziente etc...)

$$\ldots \to \widetilde{H}_n(CA) \to \widetilde{H}_n(X \cup CA) \to \widetilde{H}_n(X \cup CA, CA) \to \widetilde{H}_{n-1}(CA) \to \ldots$$

otteniamo

$$\widetilde{H}_n(X \cup CA) \cong \widetilde{H}_n(X \cup CA, CA) = H_n(X \cup CA, CA), \quad \forall n.$$

Dal Teorema 2.20, pag. 119, applicato alla coppia $(X \cup CA, CA)$, con $Z = \{p\}$ il vertice del cono CA, otteniamo

$$H_n(X \cup CA, CA) \cong H_n(X \cup CA \setminus \{p\}, CA \setminus \{p\}) \cong H_n(X,A), \quad \forall n,$$

dove l'isomorfismo di destra è dovuto al fatto che gli spazi $X \cup CA \setminus \{p\}$ e $CA \setminus \{p\})$ sono omotopicamente equivalenti ad X e ad A, rispettivamente.
Conclusione:

$$H_n(X,A) \cong \widetilde{H}_n(X \cup CA) \quad \forall n.$$

L'esercizio di Hatcher, n.26, pag.133 mostra un esempio per cui la Proposizione 2.22 **non** vale.

3. (vedi Hatcher, Esempio 2.23, parte 2, pag.125). *Considerare la Delta-struttura della sfera S^n data da due n-simplessi Δ_1^n e Δ_2^n, incollati lungo il bordo rispettando l'ordinamento dei vertici. Verificare che la differenza $\Delta_1^n - \Delta_2^n$, vista come n-catena singolare, è un generatore di $H_n(S^n)$.*

4. *(Hatcher, Esercizio 14, parte 1, pag. 132). Determinare se esiste una successione esatta corta*

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_8 \oplus \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_4 \longrightarrow 0.$$

Sol.: **Si**.
Sia $\bar{1}$ il generatore di $\mathbf{Z}_4$. Poiché f è iniettiva, $f(\bar{1})$ è un elemento di ordine quattro in $\mathbf{Z}_8 \oplus \mathbf{Z}_2$, ossia $f(\bar{1}) = (\bar{x}, \bar{y})$, con $\bar{x}$ di ordine 4 in $\mathbf{Z}_8$. Ne segue che $\bar{x} = \bar{2}$ oppure $\bar{x} = \bar{6}$. Ponendo ad esempio $f(\bar{1}) = (\bar{2}, \bar{1})$, abbiamo che $f(\mathbf{Z}_4) = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{6}, \bar{1})\}$. Definiamo adesso $g\colon \mathbf{Z}_8 \oplus \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_4$ mediante $g(\bar{x}, \bar{y}) := \bar{x} + 2\bar{y}$. È immediato verificare che g rende la successione esatta, cioè è suriettiva e soddisfa $\ker(g) = Im(f)$.

5. *Hatcher, Esercizio 17, pag. 132.*

Sol.: Per una coppia di spazi topologici, con $A \subset X$, i gruppi di omologia e di omologia estesa coincidono, cioè $H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n(X, A)$, per ogni n. Per calcolare $H_n(X, A)$ conviene quindi usare la successione esatta di omologia estesa "dove ci sono più zeri": infatti per ogni spazio connesso vale $\widetilde{H}_0(X) = 0$.
(a) Siano $X = S^2$ ed $A = \{p_1, \ldots, p_k\}$ un insieme finito di punti in X.
Dato che:
- $\widetilde{H}_n(X) \cong H_n(X)$, per ogni $n > 0$,
- $H_2(S^2) \cong \mathbf{Z}$, $\quad H_1(S^2) = 0$, $\quad \widetilde{H}_0(S^2) = 0$,
- $H_2(A) = H_1(A) = 0$, $\quad \widetilde{H}_0(A) \cong \mathbf{Z}^{k-1}$,

la successione esatta da considerare è (con gli omomorfismi soliti indotti da inclusione, quoziente etc...)

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \to & H_2(A) & \to & H_2(S^2) & \to & H_2(S^2, A) & \to & H_1(A) & \to & H_1(S^2) & \to \\ & & \| & & \| & & & & \| & & \| & \\ & & 0 & & \mathbf{Z} & & & & 0 & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \to & H_1(S^2) & \to & H_1(S^2, A) & \to & \widetilde{H}_0(A) & \to & \widetilde{H}_0(S^2) & \to & H_0(S^2, A) \to 0. \\ & \| & & & & \| & & \| & & \\ & 0 & & & & \mathbf{Z}^{k-1} & & 0 & & \end{array}$$

Ne segue che

$$H_2(S^2, A) \cong \mathbf{Z}, \quad H_1(S^2, A) \cong \mathbf{Z}^{k-1}, \quad H_0(S^2, A) = 0.$$

Similmente, siano $X = T \# T$ ed $A = \{p_1, \ldots, p_k\}$ un insieme finito di punti in X.
In questo caso
$H_2(X) \cong \mathbf{Z}$, $\quad H_1(X) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^4$, $\quad \widetilde{H}_0(X) = 0$,

e la successione esatta da considerare è

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & H_2(A) & \to & H_2(X) & \to & H_2(X,A) & \to & H_1(A) & \to \\
 & & \| & & \| & & & & \| \\
 & & 0 & & \mathbf{Z} & & & & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\to & H_1(A) & \to & H_1(X) & \to & H_1(X,A) & \to & \widetilde{H}_0(A) & \to & \widetilde{H}_0(X) & \to & H_0(X,A) & \to & 0. \\
 & \| & & \| & & & & \| & & \| \\
 & 0 & & \mathbf{Z}^4 & & & & \mathbf{Z}^{k-1} & & 0
\end{array}$$

Ne segue che $H_2(X,A) \cong H_2(X) \cong \mathbf{Z}$ e $H_0(X,A) = 0$. Inoltre la successione esatta

$$0 \to \mathbf{Z}^4 \to H_1(X,A) \to \mathbf{Z}^{k-1} \to 0$$

si spezza (vedi Nota in fondo alle soluzioni Esercizi7), da cui

$$H_1(X,A) \cong \mathbf{Z}^{k-1} \oplus \mathbf{Z}^4 \cong \mathbf{Z}^{k+3}.$$

(b) La coppia (X,A) soddisfa le ipotesi della Proposizione 2.22, in Hatcher, pag.124, cioè A è il retratto di deformazione di un suo intorno in X. Dunque, vale

$$H_n(X,A) \cong \widetilde{H}_n(X/A), \quad \forall n.$$

Il quoziente X/A è il wedge di due tori T_1 e T_2, attaccati nel punto $\bar{a} = A/A \in X/A$:

$$X/A \cong T_1 \vee T_2.$$

Poiché entrambe le coppie $(T_1, \bar{a})$ e $(T_2, \bar{a})$ soddisfano le ipotesi del Teorema 2.13, per il Corollario 2.25, pag. 126, le inclusioni $\iota_1 \colon T_1 \to T_1 \vee T_2$ e $\iota_2 \colon T_2 \to T_1 \vee T_2$ inducono isomorfismo in omologia:

$$\iota_{1,*} + \iota_{2,*} \colon \widetilde{H}_n(T_1) \oplus \widetilde{H}_n(T_1) \longrightarrow \widetilde{H}_n(T_1 \vee T_2).$$

Dunque

$$H_0(X,A) \cong \widetilde{H}_0(X/A) = \widetilde{H}_0(T_1) \oplus \widetilde{H}_0(T_2) = 0,$$
$$H_1(X,A) \cong \widetilde{H}_1(X/A) = \widetilde{H}_1(T_1) \oplus \widetilde{H}_1(T_2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z},$$
$$H_2(X,A) \cong \widetilde{H}_2(X/A) = \widetilde{H}_2(T_1) \oplus \widetilde{H}_2(T_2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z},$$

$H_i(X,A) \equiv 0$, altrimenti.

Per calcolare $H_n(X,B)$, scriviamo la successione esatta della coppia:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & H_2(B) & \xrightarrow{\iota_*} & H_2(X) & \xrightarrow{j_*} & H_2(X,B) & \xrightarrow{\partial} & H_1(B) & \to \\
 & & \| & & \| & & & & \| \\
 & & 0 & & \mathbf{Z} & & & & \mathbf{Z}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\to & H_1(B) & \xrightarrow{\iota_*} & H_1(X) & \xrightarrow{j_*} & H_1(X,B) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{H}_0(B) & \xrightarrow{\iota_*} & \widetilde{H}_0(X) & \to & H_0(X,B) & \to & 0. \\
& || & & || & & & & || & & || & & & & \\
& \mathbf{Z} & & \mathbf{Z}^4 & & & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Innanzitutto $H_0(X,B) = 0$.
Osserviamo poi che in questo caso la mappa $H_1(B) \xrightarrow{\iota_*} H_1(X)$ è iniettiva, in quanto il generatore di $H_1(B)$ è omologo ad uno dei generatori di $H_1(X)$. Ne segue che $H_2(X,B) \xrightarrow{\partial} H_1(B)$ è la mappa nulla. Poichè $H_2(X) \xrightarrow{j_*} H_2(X,B)$ è iniettiva, vale

$$H_2(X,B) = \ker \partial = Im(j_*) = \mathbf{Z}.$$

Infine

$$H_1(X,B) \cong H_1(X)/\iota_*(H_1(B)) \cong \mathbf{Z}^4/\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}^3.$$

6. *Calcolare l'omologia cellulare delle superfici compatte (vedi Hatcher, Esempio 2.36 ed Esempio 2.37, pag. 141).*

7. *Calcolare la caratteristica di Eulero delle superfici compatte. Usare il risultato ottenuto per riformulare il teorema di classificazione delle superfici compatte.*

Osservazione. In una successione esatta corta di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

il gruppo B non è determinato dai gruppi A e C. Gli esempi più semplici sono

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0, \quad f(\bar{x}) = 2\bar{x}, \quad g(\bar{y}) = \bar{y}$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0, \quad f(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{0}) \quad g((\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}.$$

Con riferimento alla successione dell'esercizio 5, possiamo considerare la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_4 \longrightarrow 0,$$

con $f(\bar{x}) := (\bar{x}, \bar{0})$ e $g(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}$.