2. *Classificare tutte le possibili superfici S compatte che si possono ottenere da un esagono, identificando i lati a due a due.*

Sol.: In un esagono ci sono tre coppie di lati. Esaminiamo i vari casi:
(a) Non ci sono coppie del tipo xx^{-1}. Allora con l'algoritmo "taglia & incolla" rendiamo adiacenti eventuali coppie del tipo xx. Ce ne saranno una o tre. Conclusione:

$$S = \mathbf{P}^2 \# T, \qquad S = \mathbf{P}^2 \# \mathbf{P}^2 \# \mathbf{P}^2$$

(b) C'è una coppia del tipo xx^{-1}. Allora con l'algoritmo "taglia & incolla" rendiamo adiacenti eventuali coppie del tipo xx. Ce ne saranno due o nessuna. Conclusione:

$$S = \mathbf{P}^2 \# \mathbf{P}^2, \qquad S = T$$

(c) Ci sono due coppie del tipo xx^{-1}. In questo caso

$$S = \mathbf{P}^2.$$

(d) Ci sono tre coppie del tipo xx^{-1}. In questo caso

$$S = S^2.$$

1. Verificare che la bottiglia di Klein è omeomorfa alla somma connessa di due piani proiettivi: trasformare il poligono etichettato $aba^{-1}b$ in un poligono etichettato c^2d^2.

3. Sia C una corona circolare chiusa in $\mathbf{R}^2$, con la topologia indotta. Che superfici si ottengono identificando la circonferenza interna e quella esterna nei due modi possibili?

4. Determinare quali superfici si ottengono identificando a due a due i lati di un poligono etichettato come segue
$$abcdd^{-1}a^{-1}b^{-1}c^{-1}, \qquad abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}.$$

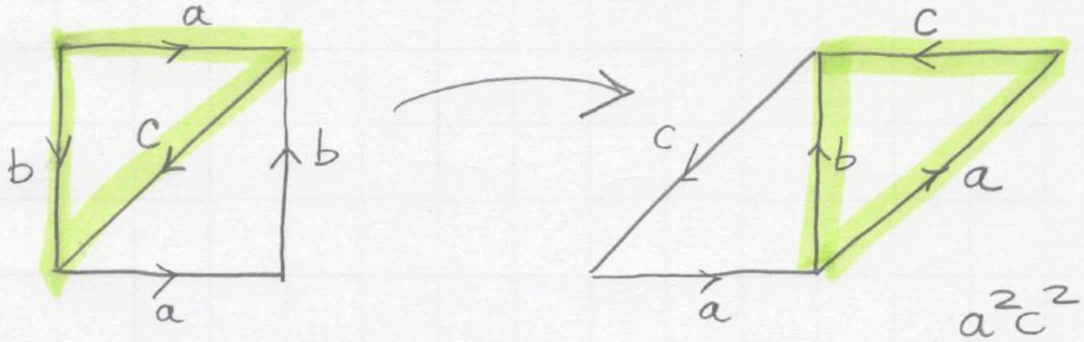
5. Determinare quali superfici si ottengono identificando a due a due i lati di un poligono etichettato come segue
$$a_1a_2\ldots a_na_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_{n-1}^{-1}a_n.$$
(Provare per $n = 1, 2, 3, \ldots$).

6. Determinare quali superfici si ottengono identificando a due a due i lati di un poligono etichettato come segue
$$a_1a_2\ldots a_na_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_{n-1}^{-1}a_n^{-1}.$$
(Distinguere n pari da n dispari e osservare cosa succede ai vertici del poligono).

FOGLIO 3

Esercizio 1

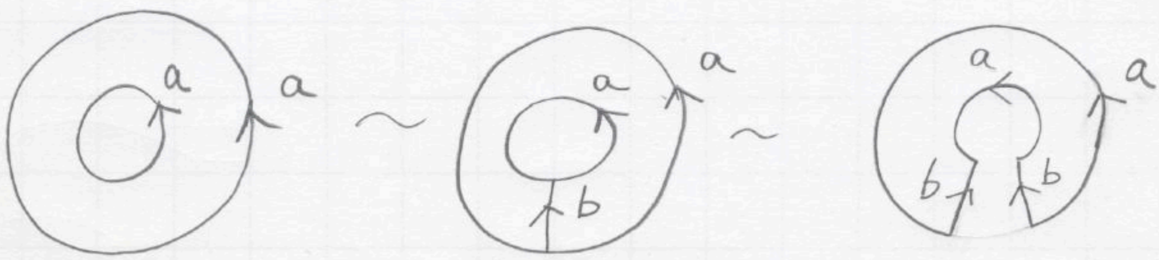
bottiglia di Klein $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$

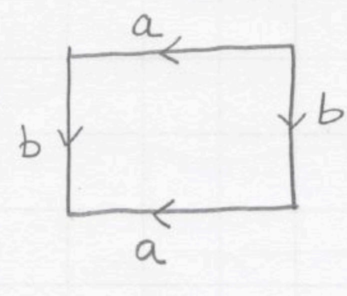


$aba^{-1}b$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ a^2c^2

Esercizio 3

caso 1

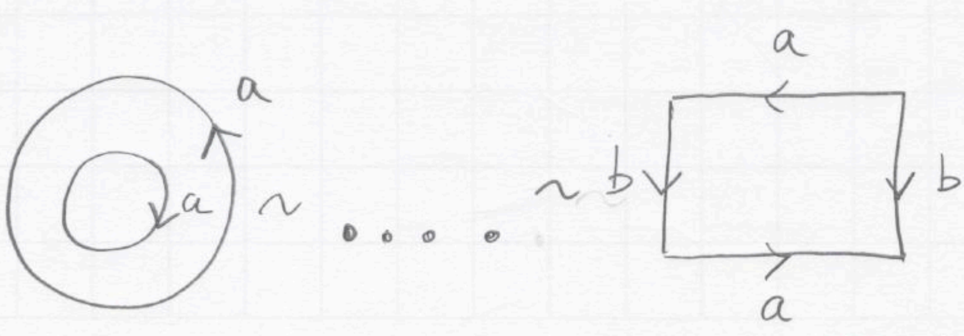


~ 

~ T toro

$a^{-1}b^{-1}ab$

caso 2



~ K

bottiglia di Klein

$ab^{-1}ab$

FOGLIO 3

Esercizio 4 (a)

Il poligono "etichettato" dalla parola

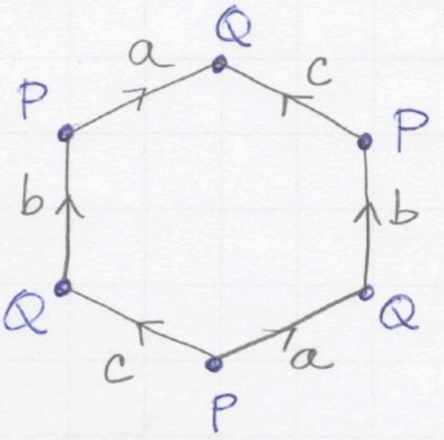
$$abcdd^{-1}a^{-1}b^{-1}c^{-1}$$

è equivalente a quello "etichettato" dalla parola

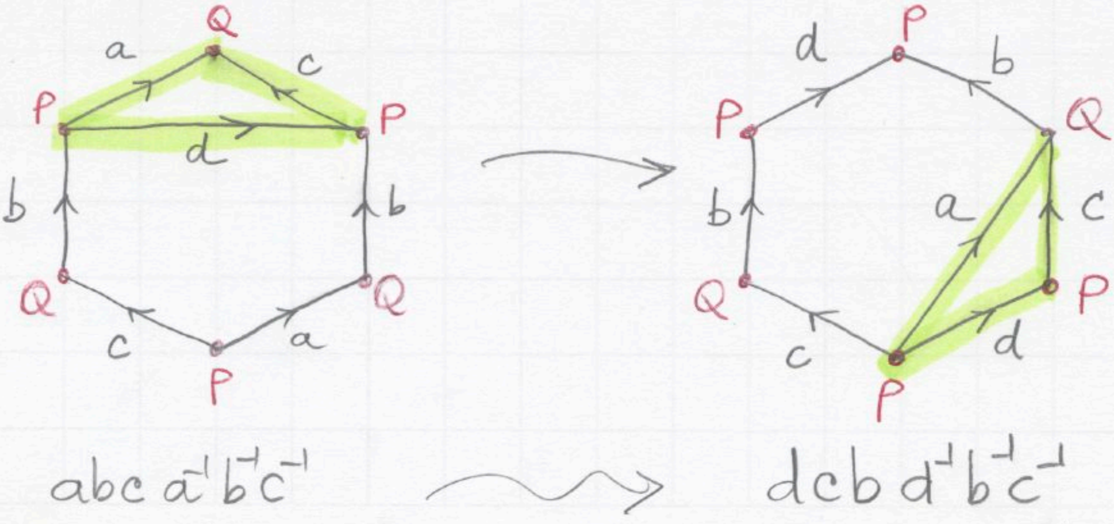
$$abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$$

(passo 2 dell'algor. taglia & incolla)

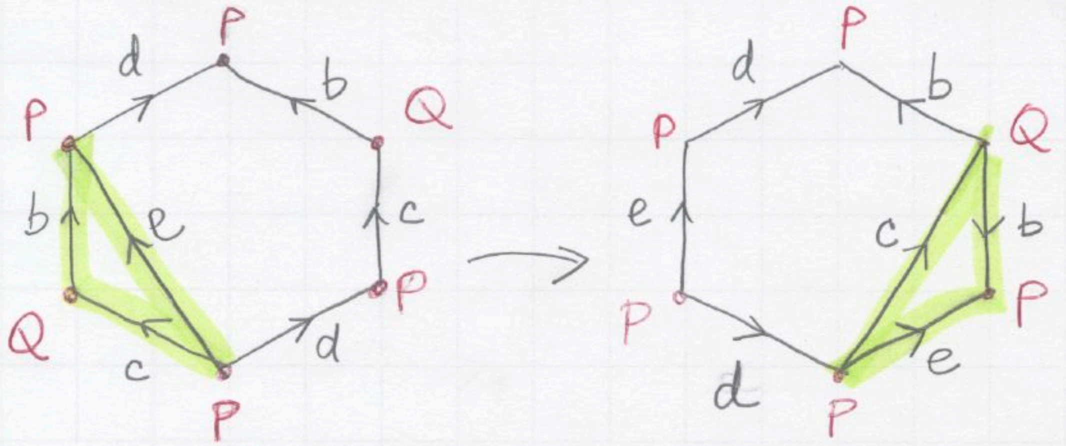
con i vertici così identificati



Applichiamo il passo 3 dell'algoritmo per ridurci al caso di un poligono con tutti i vertici identificati



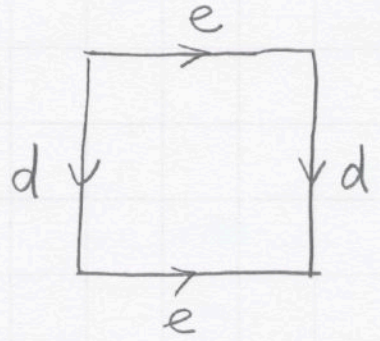
$$abca^{-1}b^{-1}c^{-1} \rightsquigarrow dcbd^{-1}b^{-1}c^{-1}$$



$$dcbd^{-1}b^{-1}c^{-1} \rightsquigarrow eb^{-1}bd^{-1}e^{-1}d \sim$$

$$\sim ed^{-1}e^{-1}d$$

(per il passo 2 che elimina la coppia $b^{-1}b$).

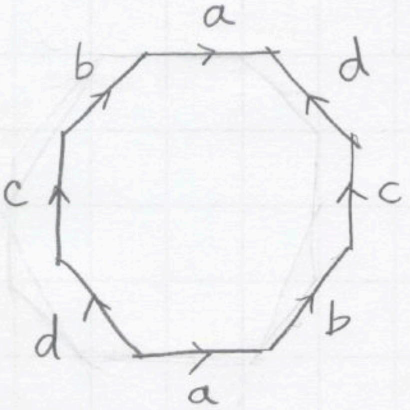


Dunque la superficie cercata è un toro.

FOGLIO 3

Esercizio 4 (b)

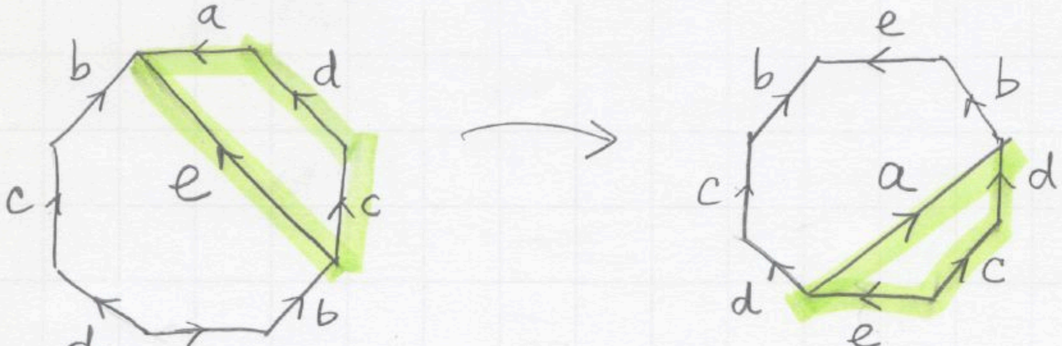
Consideriamo il poligono "etichettato"



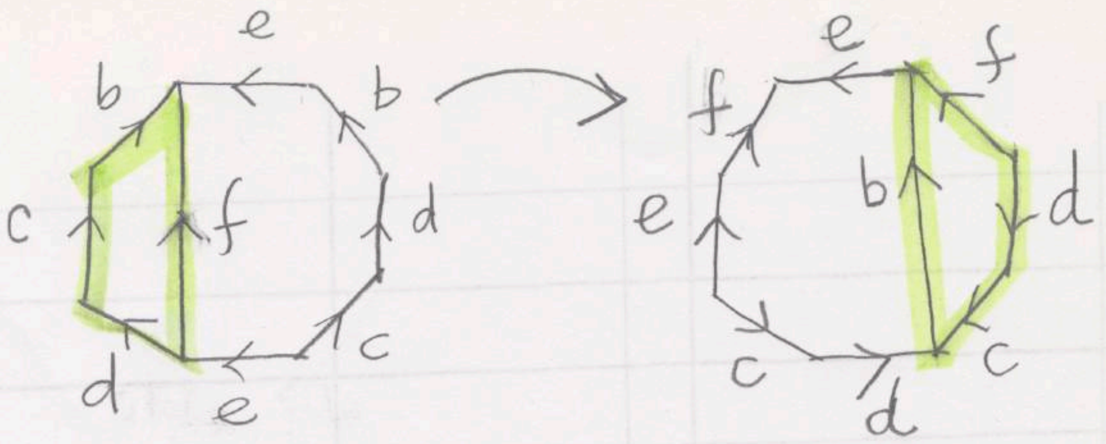
con i lati identificati dalla parola

$$abcd\,a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}.$$

Osserviamo che i vertici risultano tutti identificati. Quindi per capire di che superficie si tratta bisogna applicare il passo 5, per rendere adiacenti le coppie ab & $a^{-1}b^{-1}$ cd & $c^{-1}d^{-1}$.



$$abcd\,a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1} \rightsquigarrow e^{-1}cdb\,e^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$$



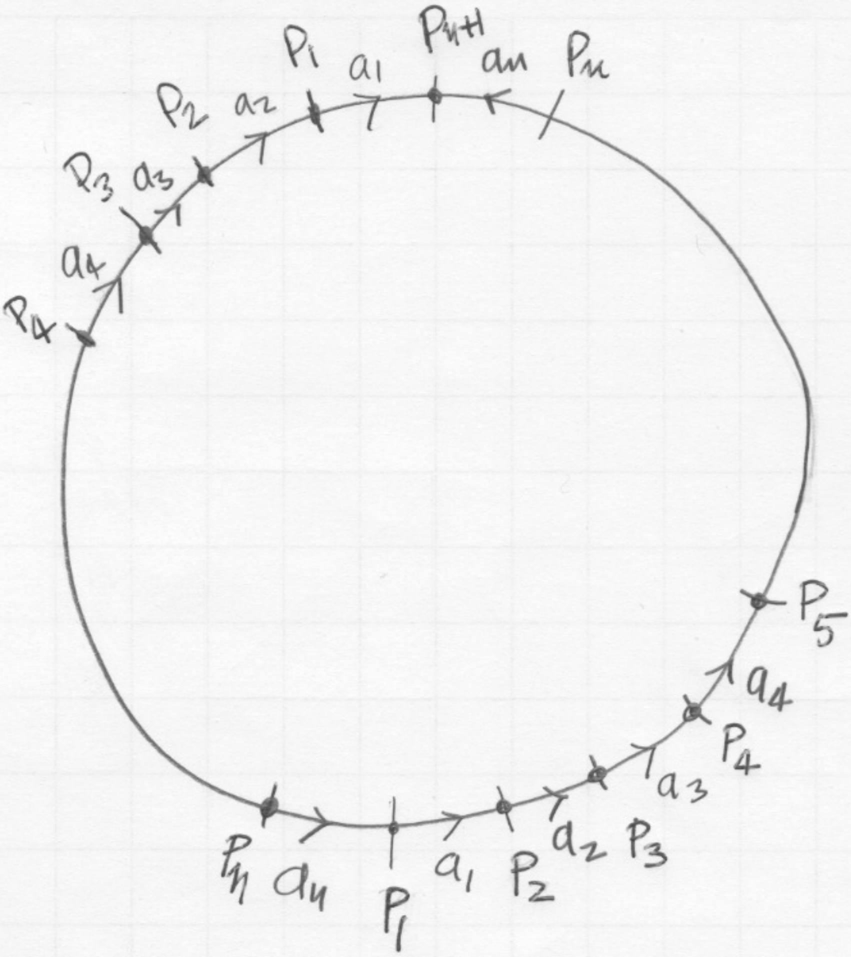
$$e^{-1}cdbe^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1} \rightsquigarrow cdc^{-1}d^{-1}fef^{-1}e^{-1}$$

In conclusione, la superficie ottenuta è la somma connessa di due tori

$$T \# T.$$

FOGLIO 3 Ⓐ

Esercizio 5



$$a_1 a_2 \dots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} a_n$$

dalle identificazioni dei lati nei versi delle frecce, risultano identificati i vertici

$$P_{n+1} = P_2 = P_4 = \dots = P_{pari}$$

$$P_n = P_1 = P_3 = P_5 = \dots = P_{dispari}$$

$$P_1 = P_{n+1}$$

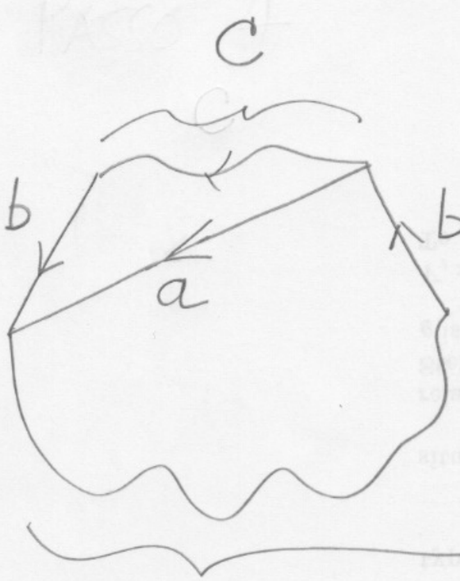
$\Longrightarrow$ alla fine tutti i vertici risultano identificati.

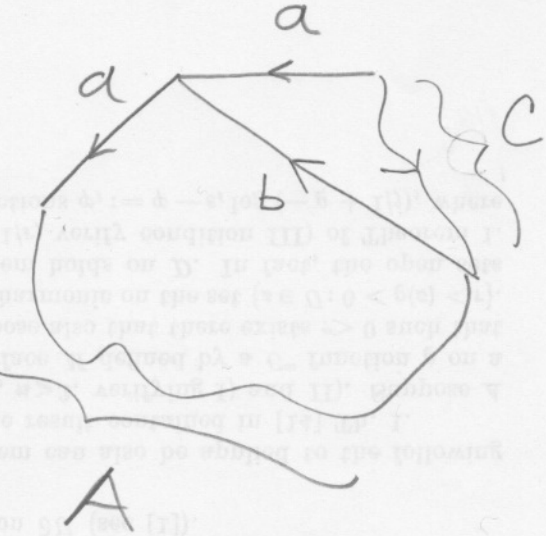
Quindi possiamo operare con i passi 4 (rendere consecutive coppie $a \dots a \dots$) & 5 (rendere consecutive quartine $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$) dell'algoritmo taglia & ricolla.

B

Per prevedere cosa si ottiene dalla figura (A) dall'applicazione dei passi 4 & 5 analizziamoli in dettaglio.

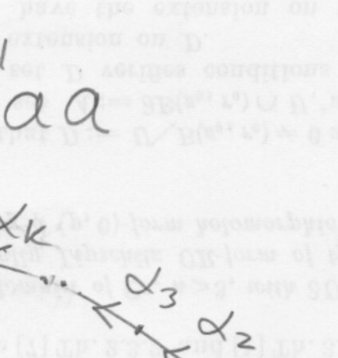
PASSO 4



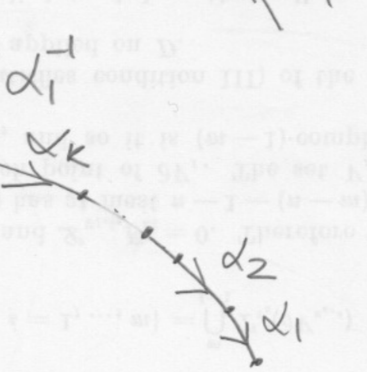


$AbCb \longrightarrow AC^{-1}aa$

dove se $C=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$

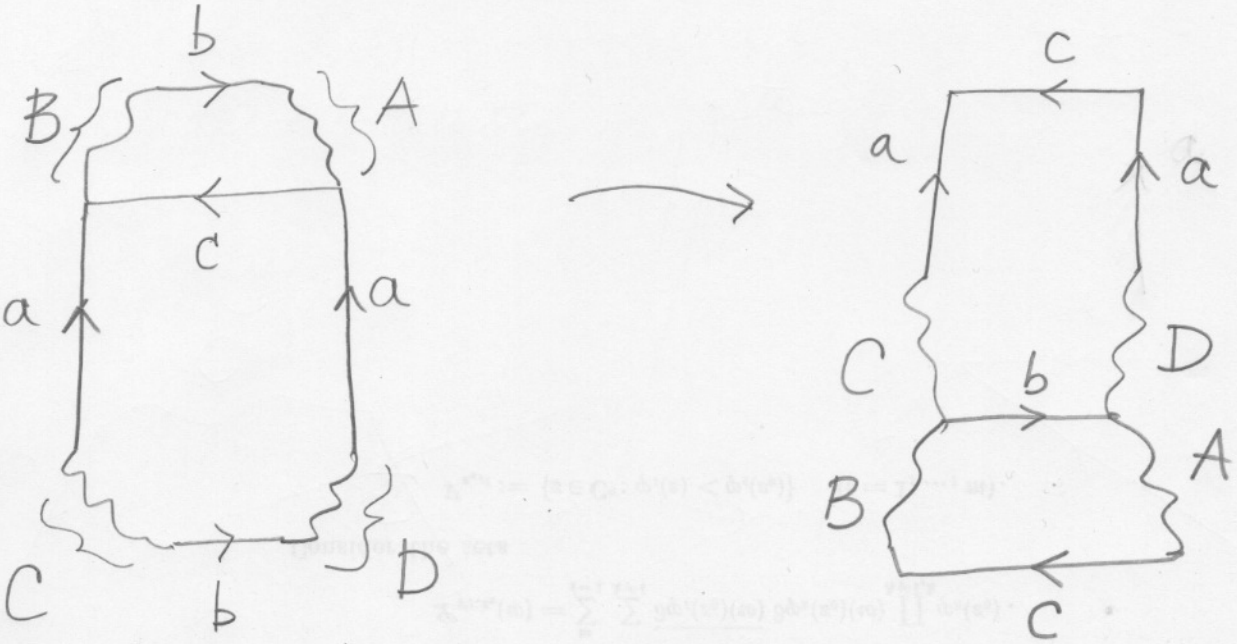


allora $C^{-1}=\alpha_k^{-1}\alpha_{k-1}^{-1}\ldots\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}$

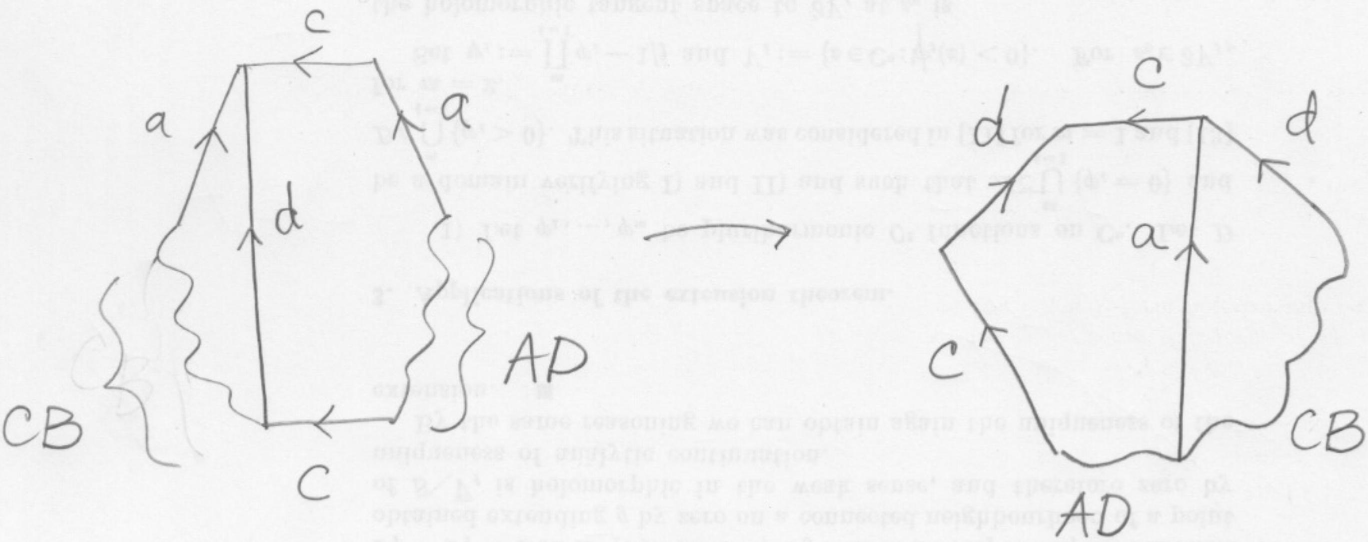


©

PASO 5



$$aAb^{-1}Ba^{-1}CbD \longrightarrow ADaca^{-1}CBc^{-1}$$



$$ADaca^{-1}CBc^{-1} \longrightarrow dcd^{-1}c^{-1}ADCB$$

D

$n=1 \qquad a_1^2 \qquad \mathbb{P}^2$

$n=2 \qquad \underset{A}{a_1}\,\underset{b}{a_2}\,\underset{C}{a_1^{-1}}\,\underset{b}{a_2} \qquad K = $ bottiglia di Klein

passo 4 : $AbCb \rightsquigarrow AC^{-1}aa = a_1^2 a^2$

da cui $S = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$

$n=3 \qquad \underbrace{a_1 a_2}_{A}\, a_3\, \underbrace{a_1^{-1} a_2^{-1}}_{C}\, a_3$

passo 4: $A a_3 C a_3 \rightsquigarrow a_1 a_2 (a_1^{-1} a_2^{-1})^{-1} aa =$

$= a_1 a_2^2 a_1 a^2$

$= \underset{A}{a^2}\, a_1\, \underset{C}{a_2^2}\, a_1$

passo 4 $\rightsquigarrow a^2 a_2^{-2} b^2$

da cui $S = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.

caso generale: $\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}_{A}\, a_n\, \underbrace{a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1}}_{C}\, a_n$

passo 4 $\quad A a_n C a_n \rightsquigarrow AC^{-1} b_n^2 =$

$= a_1 a_2 \ldots a_{n-2}\, a_{n-1}^2\, a_{n-2} \ldots a_1\, b_n^2$

$= \underbrace{b_n^2}_{A}\, a_1\, \underbrace{a_2 \ldots a_{n-1}^2 \ldots a_2}_{C}\, a_1 =$

$\longrightarrow$

E

$$= b_n^2 (a_2 \cdots a_{n-1}^2 \cdots a_2)^{-1} b_1^2 =$$

$$= b_n^2 a_2^{-1} (a_3^{-1} \cdots a_{n-2}^{-1} a_{n-1}^{-2} \cdots a_3^{-1}) a_2^{-1} b_1^2$$

$$= \underbrace{b_1^2 b_n^2}_{A} a_2^{-1} \underbrace{(a_3^{-1} \cdots a_3^{-1})}_{C} a_2^{-1} \longrightarrow$$

passo 4 : $\longrightarrow b_1^2 b_n^2 a_3 a_4 \cdots a_4 a_3 b_2^2$

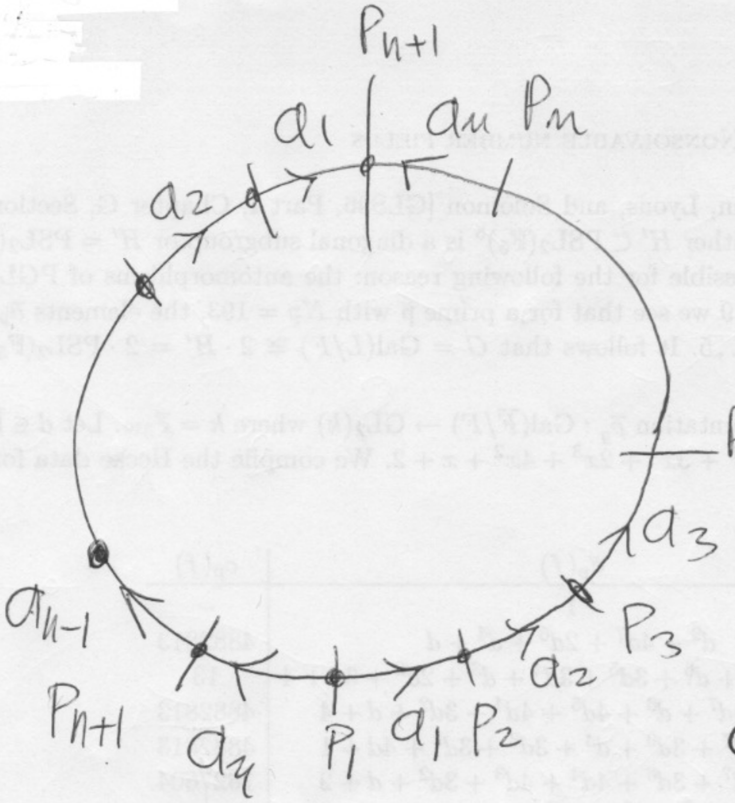
etc.

adesso è chiaro che ripetendo questa procedura troveremo

$$\underbrace{\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \cdots \# \mathbb{P}^2}_{n\text{-volte}}.$$

FOGLIO 3 ①

ESERCIZIO 6



$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}$

Dalle identificazioni dei lati, nei versi delle frecce, risultano identificati i vertici

(A) $\begin{cases} P_{n+1} = P_2 = P_4 = \cdots = P_{\text{pari}} \\ P_n = P_1 = P_3 = \cdots = P_{\text{dispari}} \end{cases}$

CASO 1

$\left.\begin{array}{l} n \text{ pari} \\ n+1 \text{ dispari} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ tutti i vertici sono identificati

$\Longrightarrow a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}$

$\sim a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1} a_n a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}$

$\sim \underbrace{T \# \cdots \# T}$

somma connessa di $\frac{n}{2}$ tori. →

dimostrazione:

(CASO 1) n pari

Non essendoci coppie del tipo ... a ... a ...
applichiamo il passo 5 (vedi osservazioni ls. 5)

$n=2$ $\quad a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$ toro T

$n=4$ $\quad a_1 a_2 \underbrace{a_3 a_4}_{B} a_1^{-1} a_2^{-1} \underbrace{a_3^{-1} a_4^{-1}}_{D}$

$$a_1 a_2 B a_1^{-1} a_2^{-1} D \xrightarrow[\text{passo 5}]{} b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1} B D =$$

$$= b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1} a_3 a_4 a_3^{-1} a_4^{-1}.$$

$\Longrightarrow$ si tratta della superficie $T \# T$.

$n=6$

$$a_1 a_2 \underbrace{a_3 a_4 a_5 a_6}_{B} a_1^{-1} a_2^{-1} \underbrace{a_3^{-1} a_4^{-1} a_5^{-1} a_6^{-1}}_{D}$$

passo 5: $\longrightarrow b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1} D B =$

$$= b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1} a_5^{-1} a_6^{-1} a_3 a_4 a_5 a_6$$

$$= \underbrace{a_3^{-1} a_4^{-1} a_5^{-1} a_6^{-1} a_3 a_4}_{B} \underbrace{a_5 a_6 b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1}}_{D}$$

passo 5: $\longrightarrow b_3 b_4 b_3^{-1} b_4^{-1} \cdot B \cdot D =$

$$= b_3 b_4 b_3^{-1} b_4^{-1} a_5^{-1} a_6^{-1} a_5 a_6 \, b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1}.$$

$\Longrightarrow$ la superficie è $T \# T \# T$.

A questo punto è chiaro che reiterando la procedura delineata qui sopra, troviamo che la superficie corrispondente alla "parola"

$$a_1 a_2 \ldots a_n \, a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_n^{-1} \qquad n \text{ pari}$$

è la somma connessa di $\frac{n}{2}$ tori

$$\underbrace{T \# \ldots \# T}_{n/2}.$$

$\boxtimes$

CASO 2

n dispari
$n+1$ pari

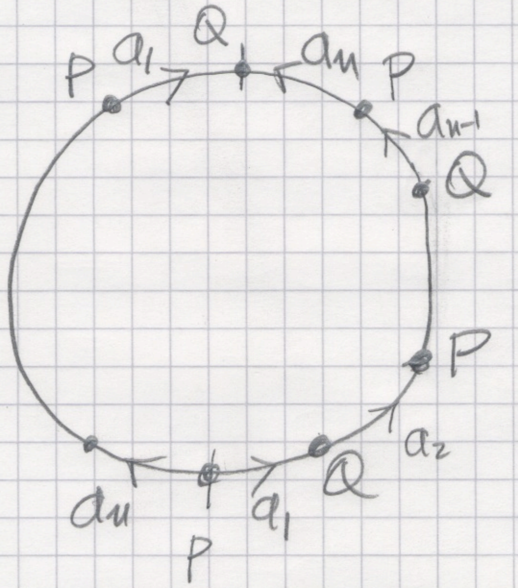
In questo caso, dopo aver identificato i lati del poligono nei versi delle frecce, risultano identificati i vertici pari

$$P_2 = P_4 = \dots = P_{n+1} \equiv Q$$

e i vertici dispari

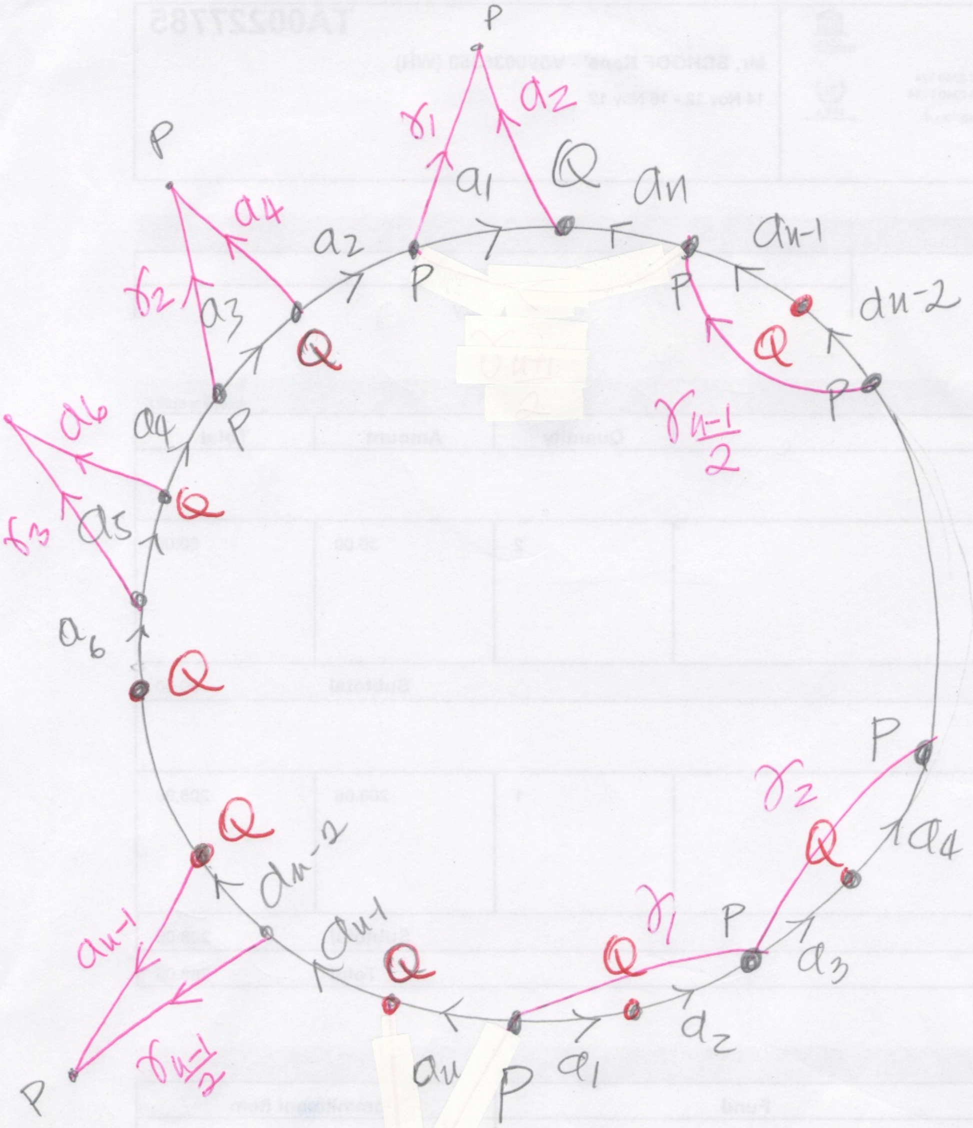
$$P_1 = P_3 = \dots = P_n \equiv P.$$

Dunque saremo nella situazione

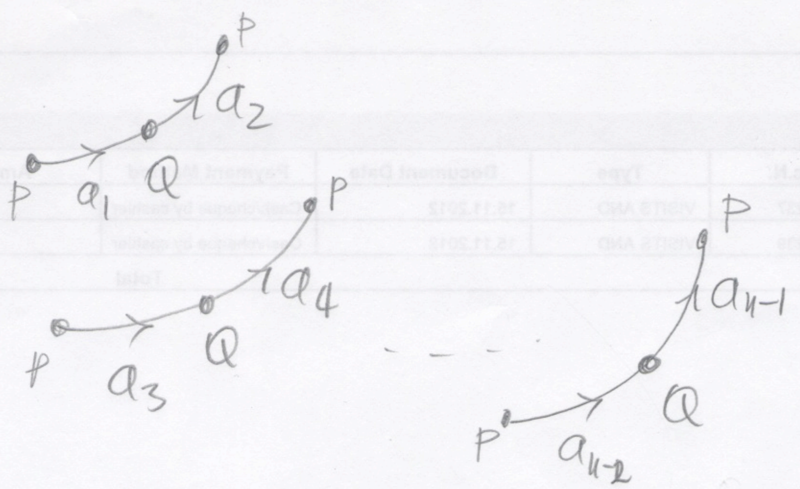


(A)

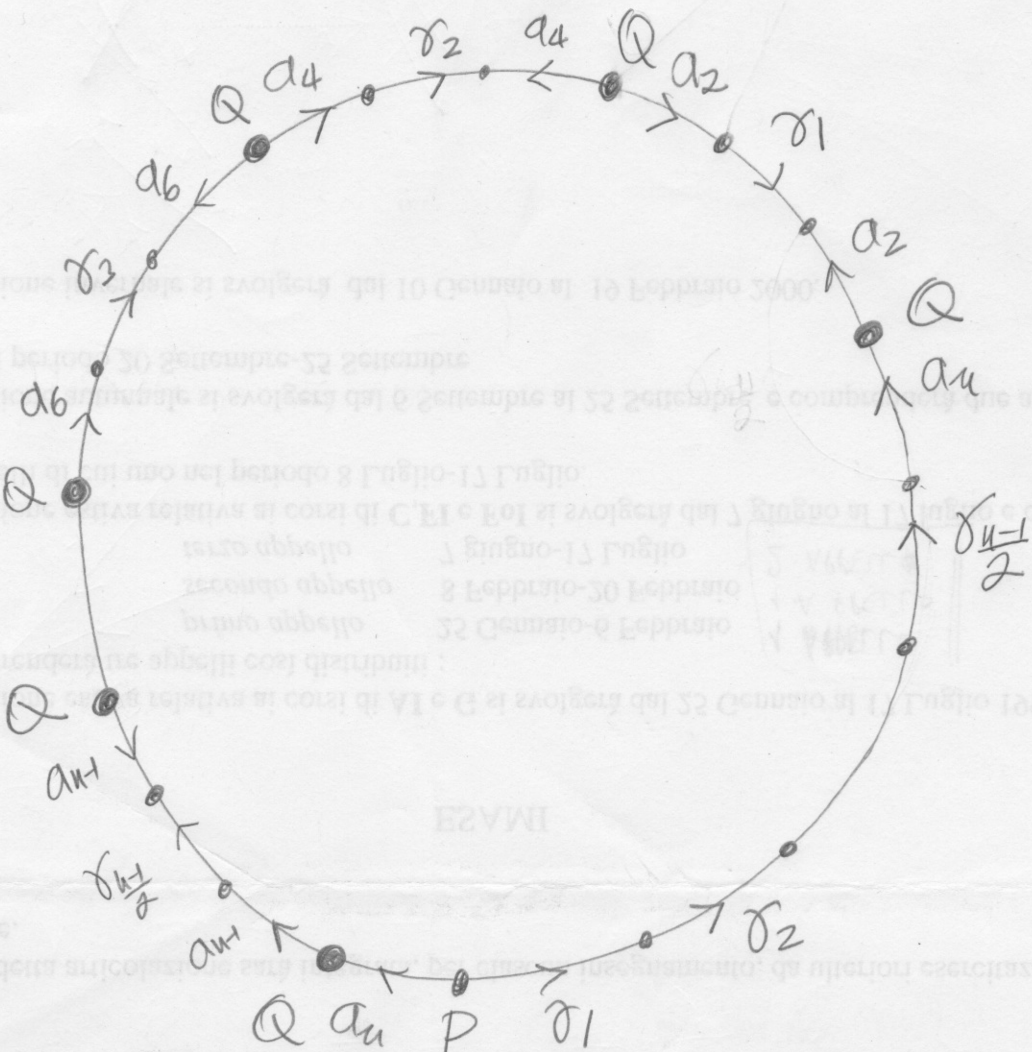
Bisogna applicare il passo (3) dell'algoritmo taglia & incolla fino a che tutti i vertici della figura (A) sono identificati.



Eliminando i vertici Q del tipo

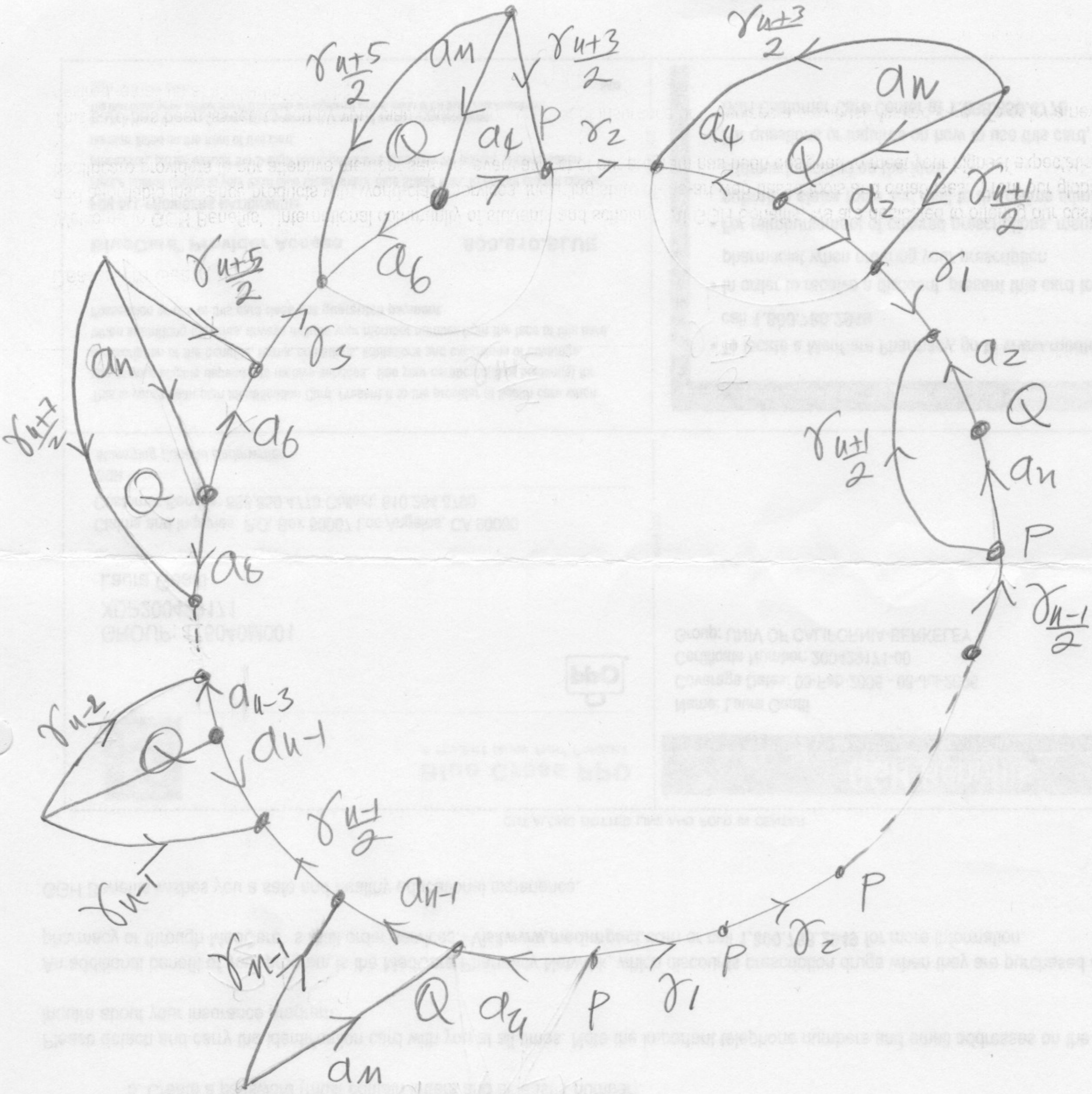


Troviamo:



$$\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_{\frac{n-1}{2}}\; a_n a_2 \gamma_1^{-1} a_2^{-1}\; a_4 \gamma_2^{-1} a_4^{-1}\; a_6 \gamma_3^{-1} a_6^{-1} \cdots$$

$$\cdots\; a_{n-1} \gamma_{\frac{n-1}{2}}^{-1} a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}.$$



$$\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{\frac{n-1}{2}}\gamma_{\frac{n+1}{2}}\gamma_1^{-1}\gamma_{\frac{n+1}{2}}^{-1}\gamma_{\frac{n+3}{2}}\gamma_2^{-1}\gamma_{\frac{n+3}{2}}^{-1}\gamma_{\frac{n+5}{2}}\gamma_3^{-1}\gamma_{\frac{n+5}{2}}^{-1}\gamma_{\frac{n+7}{2}}\gamma_4^{-1}\cdots$$

$$\cdots\gamma_{n-2}^{-1}\gamma_{n-1}\gamma_{\frac{n-1}{2}}^{-1}\gamma_{n-1}^{-1}a_n a_n^{-1}\simeq$$

$$\simeq\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_{\frac{n-1}{2}}\cdot\gamma_{\frac{n+1}{2}}\gamma_1^{-1}\gamma_{\frac{n+1}{2}}^{-1}\cdot\gamma_{\frac{n+3}{2}}\gamma_2^{-1}\gamma_{\frac{n+3}{2}}^{-1}\cdot\gamma_{\frac{n+5}{2}}\gamma_3^{-1}\gamma_{\frac{n+5}{2}}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\gamma_{\frac{n+7}{2}}\gamma_4^{-1}\gamma_{\frac{n+7}{2}}^{-1}\cdots\cdots\gamma_{n-1}\gamma_{\frac{n-1}{2}}^{-1}\gamma_{n-1}^{-1}$$

N.B. Adesso il poligono ha due lati in meno e tutti i vertici sono identificati.

Non ci sono coppie di tipo $\ldots a \ldots a \ldots$, quindi si usa il passo 5 per rendere consecutive le quartine di tipo $a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1}$.

Cominciamo con la quartina

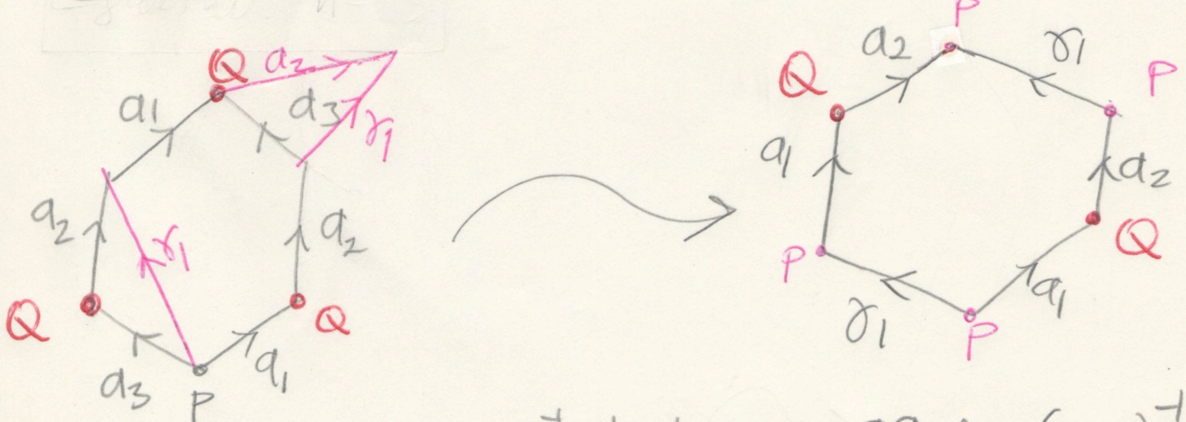
$$\gamma_1 \ldots \gamma_{\frac{n+1}{2}} \gamma_1^{-1} \gamma_{\frac{n+1}{2}}^{-1} \ldots$$

e applichiamo le osservazioni sul passo 5 fatte nell'esercizio 5.

Alla fine troviamo

$$S = \underbrace{T \# T \# \cdots \# T}_{\frac{n-1}{2}\text{-volte}}$$

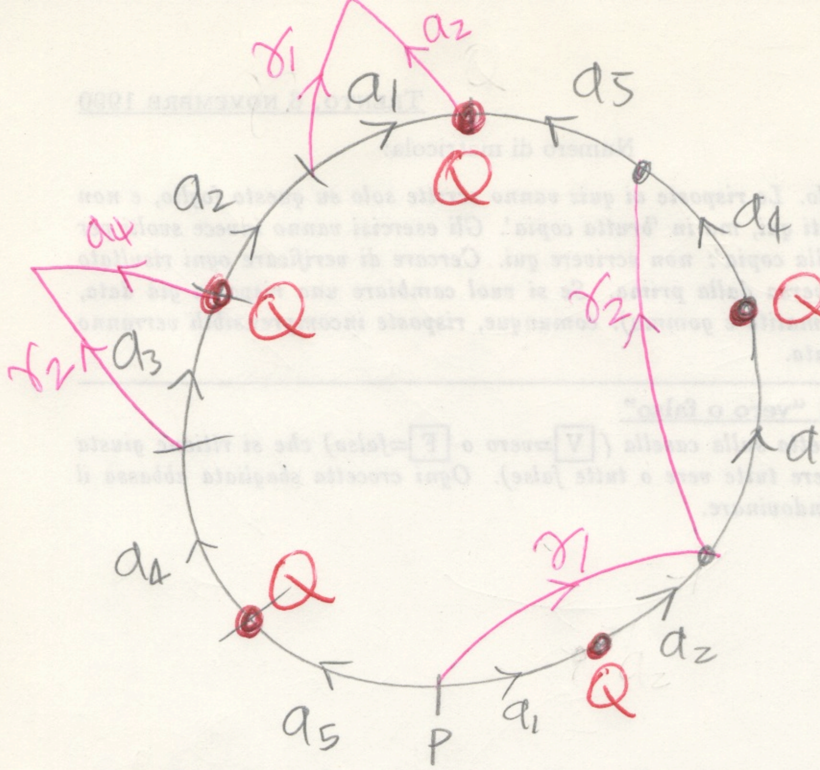
$\boxed{\text{ESEMPIO: } n=3}$



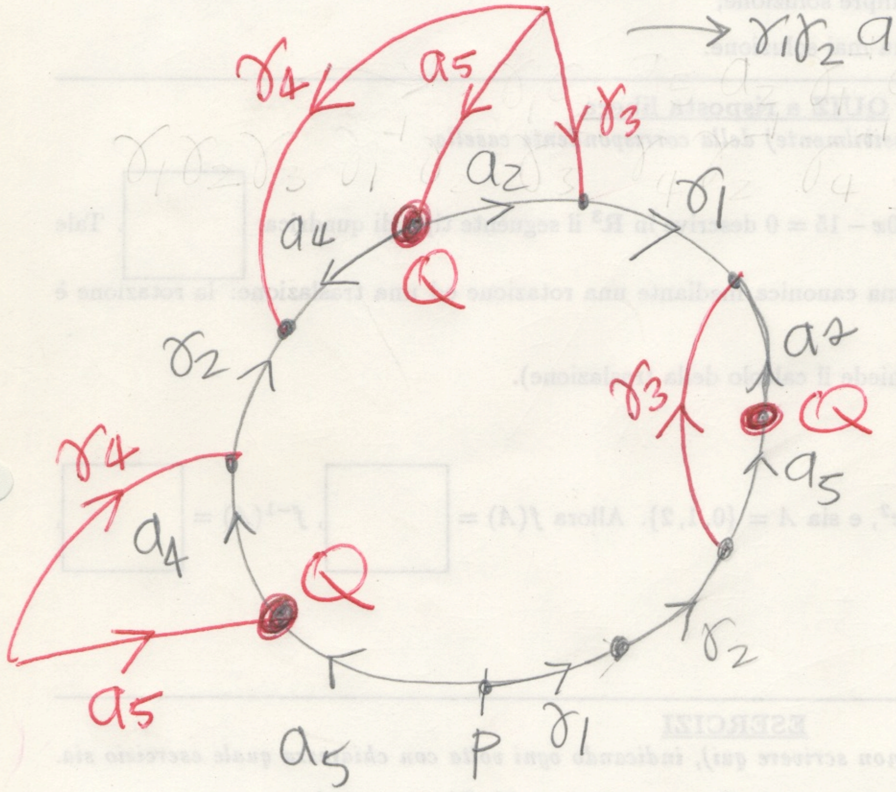
$a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1}$ $\qquad$ $a_1 a_2 \gamma_1 (a_1 a_2)^{-1} \gamma_1^{-1}$ $\quad$ toro

Esempio (9)

$n=5$



$$a_1a_2a_3a_4a_5a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_5^{-1} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \gamma_1\gamma_2 a_5a_2\gamma_1^{-1}a_2^{-1}a_4\gamma_2^{-1}a_4^{-1}a_5^{-1}$$



$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_4\gamma_2^{-1}\gamma_4^{-1}a_5a_5^{-1} \approx$$
$$\approx \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_4\gamma_2^{-1}\gamma_4^{-1}$$

$$\gamma_1 \underbrace{\gamma_2}_{B} \gamma_3 \gamma_1^{-1} \gamma_3^{-1} \underbrace{\gamma_4 \gamma_2^{-1} \gamma_4^{-1}}_{D}$$

$$\xrightarrow[5^\circ \text{ passo}]{} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} \quad \gamma_4 \gamma_2^{-1} \gamma_4^{-1} \gamma_2$$

$\Longrightarrow$ la superficie è $T \# T$