Matematica Discreta Ingegneria dei Modelli e Sistemi (Geatti) 1° esonero Roma 3 aprile 2008, 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare e sintetiche.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Determinare il numero delle sequenze di* 4 *cifre decimali (fra* 0 *e* 9*) in ognuno dei seguenti casi:*
   (a) Non contengono due volte la stessa cifra.
   (b) Iniziano o terminano con una cifra pari.
   (c) Hanno precisamente due cifre uguali a 9.

(a) $A = \{XYZW \mid X, Y, Z, W \in \{0, \dots, 9\},\ \text{tutti distinti}\}, \quad |A| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7.$

(b) L'insieme cercato è $A \cap B$, dove
$A = \{XYZW \mid Y, Z, W \in \{0, \dots, 9\},\ X \in \{0, 2, 4, 6, 8\}\} \quad |A| = 5 \cdot 10^3$
$B = \{XYZW \mid X, Y, Z \in \{0, \dots, 9\},\ W \in \{0, 2, 4, 6, 8\}\} \quad |B| = 5 \cdot 10^3$
$A \cap B = \{XYZW \mid Y, Z \in \{0, \dots, 9\},\ X, W \in \{0, 2, 4, 6, 8\}\} \quad |B| = 5^2 \cdot 10^2$
Dunque $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3 - 5^2 \cdot 10^2$.

(c) Le due cifre uguali a 9 si possono disporre in sei modi (tanti quanti sono i sottoinsiemi di 2 elementi in un insieme di 4 elementi)

$99XY, \quad 9X9Y, \quad 9XY9, \quad X99Y, \quad X9Y9, \quad XY99$, con $X, Y \in \{0, \dots, 8\}$. In totale $6 \cdot 9^2$ sequenze.

2. *Sia* F_n *la successione definita per ricorrenza da* $F_n = F_{n-1} + 2F_{n-2} + 3^n$ *con condizioni iniziali* $F_1 = 0$ *ed* $F_2 = 1$.
   (a) Determinare F_5.
   (b) Determinare F_n *risolvendo la corrispondente equazione alle differenze finite.*

(a) $F_3 = F_2 + 2F_1 + 3^3 = 28, \quad F_4 = F_3 + 2F_2 + 3^4 = 111, \quad F_5 = F_4 + 2F_3 + 3^5 = 410.$

(b) Equazione omogenea associata $F_n = F_{n-1} + 2F_{n-2}$, con polinomio caratteristico $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda = 2, -1$ e la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$\alpha_n = A2^n + B(-1)^n, \quad A, B \in \mathbf{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\beta_n = C3^n$, $C \in \mathbf{R}$, (perché il termine noto è della forma $3^n P(n)$, con $P(n)$ polinomio in n di grado zero, e 3 non è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea). Sostituendo β_n nell'equazione originaria troviamo che $C = \frac{9}{4}$.

La soluzione generale dell'equazione originaria è data da

$$S_n = A2^n + B(-1)^n + \frac{9}{4}3^n, \qquad A, B \in \mathbf{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali determiniamo infine A e B:

$$\begin{cases} F_1 = 2A - B + \frac{27}{4} = 0 \\ F_2 = 4A + B + \frac{81}{4} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{13}{3},\ B = -\frac{23}{12}.$$

3. *Sia* $B = \{k \in \mathbf{Z} \mid k > 0,\ k \text{ divide } 12\}$. *Sia* R *la relazione su* B *definita da "*n *è in relazione con* m *se e solo se* n *divide* m*".*
   (a) Dimostrare che R *è un ordinamento parziale su* B.
   (b) Disegnare il diagramma di Hasse associato.
   (c) Determinare gli elementi massimali, minimali ed eventualmente massimo e minimo assoluti.

(a) Dobbiamo verificare che la relazione è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.
Ricordiamo che n divide m se m è un multiplo intero di n. Se, come nel nostro caso, m ed n sono positivi allora $m = q \cdot n$, con q intero, $q \geq 1$.
Riflessiva: a divide a. Infatti $a = 1 \cdot a$.

Antisimmerica: a divide b e b divide a implica $a = b$. Infatti se $b = qa$ e $a = pb$ con $p, q \geq 1$ allora $a = pqa$. Questo implica $pq = 1$ e $p = q = 1$. In particolare $a = b$.
Transitiva: a divide b e b divide c implica a divide c. Infatti se $b = pa$ e $c = qb$ con $p, q \leq 1$, allora $c = pqa$, ossia a divide c.

(b) I divisori positivi 12 sono $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Si ha che

$$1 \leq 2 \leq 4 \leq 12, \quad 1 \leq 3 \leq 6 \leq 12, \quad 2 \leq 6.$$

(c) Massimo (confrontabile con tutti e maggiore di tutti): 12, minimo (confrontabile con tutti e minore di tutti): 1.

4. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione diofantea* $37X + 20Y = 3$.

Condizione necessaria e sufficiente a che l'equazione abbia soluzioni è che $mcd(37, 20)$ divida 3. Dall'algoritmo euclideo troviamo:

$$37 = 20 + 17, \quad 20 = 17 + 3, \quad 17 = 5 \cdot 3 + 2 \quad , 3 = 2 + 1$$

ossia $mcd(37, 20) = 1$. Quindi l'equazione ha soluzioni. Usando le relazioni qui sopra determiniamo gli interi $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ tali che $37\bar{X} + 20\bar{Y} = 1$:

$1 \cdot 37 + 0 \cdot 20 = 37$
$0 \cdot 37 + 1 \cdot 20 = 20$
$1 \cdot 37 + (-1) \cdot 20 = 17$
$(-1) \cdot 37 + 2 \cdot 20 = 3$
$6 \cdot 37 + (-11) \cdot 20 = 2$
$(-7) \cdot 37 + 13 \cdot 20 = 1.$

Si può controllare che $\bar{X} = -7$ e $\bar{Y} = 13$ soddisfano $37\bar{X} + 20\bar{Y} = 1$. Ne segue che una soluzione particolare dell'equazione è data da $(X_0, Y_0) = (-21, 39)$ e che soluzione generale dell'equazione è data da

$$(X, Y) = (-21, 39) + K(20, -37), \quad K \in \mathbf{Z}.$$

(Anche a occhio si vede che $37 \cdot (-1) + 20 \cdot 2 = 3$ e quindi $(-1, 2)$ è un'altra soluzione particolare dell'equazione).

5. *Determinare tutti gli interi* X *fra* 0 *e* 200 *che soddisfano il sistema di congruenze*

$$\begin{cases} X \equiv 1 \mod 7, \\ X \equiv 3 \mod 13. \end{cases}$$

È evidente che le congruenze del sistema hanno singolarmente soluzione. Inoltre $mcd(7, 13) = 1$, quindi anche il sistema ha soluzioni. Le soluzioni sono della forma

$$X = X_0 + M(7 \cdot 13), \quad M \in \mathbf{Z},$$

dove X_0 è una soluzione particolare del sistema.
La soluzione generale della prima congruenza è data da $X = 1 + 7k$, per $k \in \mathbf{Z}$. Sostituendo questa relazione nella seconda congruenza troviamo

$$1 + 7k \equiv 3 \mod 13 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 7k = 3 + 13h, \quad k, h \in \mathbf{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7k + 13h = 2, \quad k, h \in \mathbf{Z}.$$

Troviamo facilmente che $13 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 = 1$, quindi la soluzione generale dell'equazione $7k + 13h = 2$ risulta

$$(k, h) = (4, -2) + M(13, -7), \quad M \in \mathbf{Z}.$$

Da qui ricaviamo $k = 4 + 13M$ che sostituito nella soluzione della prima congruenza ci da la soluzione generale del sistema

$$X = 1 + 7k = 1 + 7(4 + 13M) = 29 + M(7 \cdot 13) = 29 + M91, \quad M \in \mathbf{Z}.$$

Gli interi fra 0 e 200 che soddisfano il sistema di congruenze sono due: $X = 29$ e $X = 120$.