

- (1) Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .
- (i) Trovare le formule per la traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ .
  - (ii) Calcolare  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
  - (iii) Calcolare  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
  - (iv) Calcolare  $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

*Sol.* (i) Si ha

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T_{\mathbf{q}+3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = T_{3\mathbf{p}-\mathbf{q}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- (2) Sia  $Q$  il trapezio in  $\mathbf{R}^2$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la traslazione  $T_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$ .
- (ii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione  $S_0$  data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
- (iii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi}$  data dalla matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

*Sol.* (i) Si tratta del trapezio di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si tratta del trapezio di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Si tratta del trapezio di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(3) Sia  $D_{2,5}$  la dilatazione data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

(i) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda,\mu}$  tale che  $D_{\lambda,\mu} \circ D_{2,5}$  sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda,\mu}$  tale che  $D_{2,5} \circ D_{\lambda,\mu}$  sia l'applicazione identica.

*Sol.* Osserviamo innanzitutto che le dilatazioni commutano fra loro: date due dilatazioni  $D_{\lambda,\mu}$  e  $D_{\sigma,\tau}$  si ha

$$D_{\lambda,\mu} \circ D_{\sigma,\tau} = D_{\sigma,\tau} \circ D_{\lambda,\mu} = D_{\lambda\sigma,\mu\tau}.$$

(i)(ii) La dilatazione  $D_{1/2,1/5}$ , che è l'inversa di  $D_{2,5}$ , soddisfa  $D_{1/2,1/5} \circ D_{2,5} = D_{2,5} \circ D_{1/2,1/5} = Id$ .

(4) Per quali dilatazioni  $D_{\lambda,\mu}$  abbiamo che  $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu}$  è l'applicazione identica?

*Sol.* Si ha che  $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu} = Id$  se e solo se  $\lambda^2 = \mu^2 = 1$ , ossia se e solo se  $\lambda = \pm 1$ ,  $\mu = \pm 1$ . Pertanto le dilatazioni con questa proprietà sono 4.

(5) Sia  $Q$  il quadrato in  $\mathbf{R}^2$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$ .

(ii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi}$ .

(iii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{3\pi/2}$ .

(iv) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la dilatazione  $D_{2,3}$ .

(v) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo l'omotetia  $D_2$ .

*Sol.* (i) La rotazione  $R_{\pi/2}$  è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , dunque l'immagine di  $Q$  è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) La rotazione  $R_{\pi}$  è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , dunque l'immagine di  $Q$  è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(iii) La rotazione  $R_{3\pi/2}$  è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , dunque l'immagine di  $Q$  è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(iv) La dilatazione  $D_{2,1}$  è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , dunque l'immagine di  $Q$  è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(v) L'omotetia  $D_3$  è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , dunque l'immagine di  $Q$  è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(

(6) Sia  $Q$  il quadrato in  $\mathbf{R}^2$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$ .
- (ii) Per quali angoli  $\varphi$  la rotazione  $R_\varphi$  manda il quadrato in se stesso?
- (iii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi/4}$ .
- (iv) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la dilatazione  $D_{2,1}$ .
- (v) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo l'omotetia  $D_3$ .

*Sol.* (i) La rotazione  $R_{\pi/2}$  è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , dunque l'immagine di  $Q$  è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente coincide con  $Q$ . (ii) Per tutti gli angoli della forma  $\varphi = k\pi/2$ , con  $k \in \mathbf{Z}$ . (iii) La rotazione  $R_{\pi/4}$  è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ , dunque l'immagine di  $Q$  è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) La dilatazione  $D_{2,3}$  è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , dunque l'immagine di  $Q$  è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(v) L'omotetia  $D_2$  è data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , dunque l'immagine di  $Q$  è il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(7) Siano  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  i punti di  $\mathbf{R}^2$  di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- (i) Per quali angoli  $\varphi$  la rotazione  $R_\varphi$  manda l'esagono di vertici  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  in se stesso?

*Sol.* (i) Per tutti gli angoli della forma  $\varphi = k\pi/3$ , con  $k \in \mathbf{Z}$ .

(8) Sia  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare le formule per la rotazione  $R$  di centro  $\mathbf{p}$  ed angolo  $\pi/2$ .
- (ii) Trovare le formule per la rotazione  $R'$  di centro  $\mathbf{p}$  ed angolo  $-\pi/4$ .
- (iii) Sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando  $R$  ad  $l$ .

(iv) Sia  $m$  la retta di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando  $R'$  ad  $l$ .

*Sol.* (i)  $R\mathbf{x} = R_{\pi/2}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p}$ . Poiché la rotazione  $R_{\pi/2}$  è rappresentata dalla matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , troviamo

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - 2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(ii)  $R'\mathbf{x} = R_{\pi/4}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p}$ . Poiché la rotazione  $R_{\pi/4}$  è rappresentata dalla matrice  $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ , troviamo

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

(iii) I punti della retta  $l$  sono quelli della forma  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ -1 + t \end{pmatrix}$ . Applicando la formula trovata nel punto (i), troviamo che l'immagine della retta  $l$  tramite la trasformazione  $R$  è una retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - t \\ 1 + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iv) I punti della retta  $m$  sono quelli della forma  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - t \\ t \end{pmatrix}$ . Applicando la formula trovata nel punto (ii), troviamo che l'immagine della retta  $m$  tramite la trasformazione  $R'$  è una retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}-2}{2} - \sqrt{2}t \\ \frac{9\sqrt{2}-2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}-2}{2} \\ \frac{9\sqrt{2}-2}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero, mediante un cambio di parametro,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}-2}{2} \\ \frac{9\sqrt{2}-2}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(9) Sia  $l$  la retta di equazione  $x_1 + x_2 = 0$ .

(i) Calcolare le formule della riflessione rispetto ad  $l$ .

(ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

*Sol.* (i) La retta  $l$  è generata dal vettore  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  di norma 1. Questo vettore si completa ad una base ortonormale di  $\mathbf{R}^2$  come

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Rispetto alla base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , la matrice che rappresenta la riflessione rispetto a  $l$  è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice che rappresenta la riflessione rispetto a  $l$  nella base canonica di  $\mathbf{R}^2$  è

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

*Alternativamente.* Sia  $\theta$  l'angolo formato dalla retta con l'asse delle  $x_1$  positive. Allora, dalle coordinate di  $\mathbf{v}$ , troviamo  $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$  e  $\sin \theta = -1/\sqrt{2}$ . Usando le formule di duplicazione di  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  ricaviamo la matrice della riflessione rispetto ad  $l$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Alternativamente.* Sia  $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  un generico punto in  $\mathbf{R}^2$ . La retta per  $P$  e perpendicolare ad  $l$  ha equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Essa interseca  $l$  nel punto  $Q = \begin{pmatrix} (a-b)/2 \\ -(a-b)/2 \end{pmatrix}$ , corrispondente al valore del parametro  $t_0 = -(a+b)/2$ . Il punto  $S_l(P)$ , simmetrico di  $P$  rispetto ad  $l$ , corrisponde al valore del parametro  $2t_0$  ed è dato da

$$S_l(P) = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

(ii) Si tratta dei punti

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) I punti della retta in questione hanno la forma  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -t \end{pmatrix}$ . Applicando la formula trovata al punto (i), troviamo che l'equazione parametrica della retta riflessa è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(10) Sia  $Q$  il quadrato dell'Eserc.5. Calcolare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) alla retta di equazione  $x_1 = x_2$ .

*Sol.* (i) E' il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(ii) E' il quadrato di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Coincide con  $Q$ .

(11) Sia  $Q$  il quadrato dell'Eserc.6. Calcolare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) alla retta di equazione  $x_1 = x_2$ .
- (iv) Trovare tutte le riflessioni  $S_\varphi$  che mandano  $Q$  in se stesso.

*Sol.* (i) Coincide con  $Q$ . (ii) Coincide con  $Q$ . (iii) Coincide con  $Q$ . (iv) Oltre a quelle indicate nei punti (i), (ii) e (iii), c'è anche la riflessione rispetto alla retta  $x_1 = -x_2$ .

(12) Siano  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  i punti dell'Eserc.7. Calcolare l'immagine dell'esagono di vertici  $Q_i$  dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) la retta di equazione  $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$ .
- (iv) Trovare tutte le riflessioni  $S_\varphi$  che mandano l'esagono in se stesso.

*Sol.* (i) Coincide con l'esagono dato. (ii) Coincide con l'esagono dato. (iii) Coincide con l'esagono dato. (iv) Oltre a quelle indicate nei punti (i), (ii) e (iii), ci sono anche le riflessioni rispetto alle rette  $\sqrt{3}x_1 - x_2 = 0$ ,  $x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0$  e  $x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$ .

(13) Sia  $S$  la riflessione rispetto alla retta  $l$  di equazione cartesiana  $3x_1 + 4x_2 = 0$ .

- (i) Calcolare la tangente dell'angolo  $\varphi$  formato da  $l$  con l'asse delle ascisse.
- (ii) Calcolare le formule per  $S$ .

*Sol.* (i) I vettori della retta  $l$  hanno la forma  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Sia  $\theta$  l'angolo  $\varphi$  formato da  $l$  con l'asse delle ascisse. Avendo scelto il vettore della direzione  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$  di  $l$  di norma 1, troviamo  $\cos \varphi = 4/5$  e  $\sin \varphi = -3/5$  e di conseguenza

$$\tan \varphi = -3/4.$$

(ii) Usando le formule di duplicazione di  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  ricaviamo la matrice della riflessione  $S$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}.$$

*Alternativamente:* Una base ortonormale di  $\mathbf{R}^2$  con il primo vettore parallelo alla direzione di  $l$  è

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

La riflessione rispetto a  $l$ , nella base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  è rappresentata dalla matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , dunque, nella base canonica si  $\mathbf{R}^2$  la riflessione rispetto a  $l$  è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

da cui

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} x_1 - \frac{24}{25} x_2 \\ -\frac{24}{25} x_1 - \frac{7}{25} x_2 \end{pmatrix}$$

(14) Sia  $S$  la riflessione rispetto alla retta  $l$  di equazione cartesiana  $3x_1 + 4x_2 = 0$ .

- (i) Calcolare le formule della riflessione  $S_0$  rispetto all'asse delle ascisse.
- (ii) Vedere se

$$S = R_\varphi \circ S_0 \circ R_{-\varphi},$$

dove  $\varphi$  e' l'angolo formato dalla retta  $l$  con l'asse delle ascisse. (Suggerimento: calcolare le formule per  $R_\varphi$  e per  $S$ ).

*Sol.* (i) Si ha

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

(ii) La matrice che rappresenta  $R_\varphi$  è

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

(vedi esercizio 11), mentre la matrice che rappresenta  $R_{-\varphi}$  è

$$\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Pertanto la matrice che rappresenta  $R_\varphi \circ S_0 \circ R_{-\varphi}$  è

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

cioè coincide con la matrice che rappresenta  $S$ , ovvero

$$S = R_\varphi \circ S_0 \circ R_{-\varphi}.$$

(15) Sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e sia  $m$  la retta di equazione  $x_1 = 0$ .

- (i) Trovare le formule della riflessione  $S$  rispetto ad  $l$ .
- (ii) Calcolare le formule della riflessione  $S'$  rispetto ad  $m$ .
- (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno  $S \circ S'$  e  $S' \circ S$ ?

*Sol.* (i) Il vettore  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  è un vettore parallelo alla retta  $l$ , di norma 1. Una base ortonormale di  $\mathbf{R}^2$  il cui primo vettore sia  $\mathbf{e}_1$  è

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

In questa base la riflessione rispetto alla retta  $l$  è rappresentata dalla matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Dunque la matrice che rappresenta la riflessione rispetto ad  $l$  nella base canonica di  $\mathbf{R}^2$  è

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(ii) La retta  $m$  è l'asse delle ordinate. Dunque

$$S' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$(S \circ S')\mathbf{x} = S(S'\mathbf{x}) = S \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$(S' \circ S)\mathbf{x} = S'(S\mathbf{x}) = S' \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(v) La matrice che rappresenta  $S \circ S'$  rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^2$  è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\text{sen}(-\frac{\pi}{2}) \\ \text{sen}(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Vale a dire:  $S \circ S'$  è la rotazione di angolo  $-\pi/2$  attorno all'origine. La matrice che rappresenta  $S' \circ S$  rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^2$  è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\text{sen} \frac{\pi}{2} \\ \text{sen} \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Vale a dire:  $S' \circ S$  è la rotazione di angolo  $\pi/2$  attorno all'origine.

(16) Sia  $l$  la retta di equazione  $x_1 = 1$  e sia  $m$  la retta di equazione  $x_2 = 2$ .

- (i) Calcolare le formule della riflessione  $S$  rispetto ad  $l$ .
- (ii) Calcolare le formule della riflessione  $S'$  rispetto ad  $m$ .
- (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

(iv) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno  $S \circ S'$  e  $S' \circ S$ ?

*Sol.* (i) Un punto di  $l$  è  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . La riflessione rispetto a  $l$  è  $S\mathbf{x} = A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p}$ , dove  $A$  rappresenta la riflessione rispetto alla retta vettoriale avente la stessa direzione di  $l$ . La matrice che rappresenta la trasformazione lineare  $A$  è  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , da cui

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(ii) Un punto di  $m$  è  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . La riflessione rispetto a  $m$  è  $S'\mathbf{x} = A'(\mathbf{x} - \mathbf{q}) + \mathbf{q}$ , dove  $A'$  rappresenta la riflessione rispetto alla retta vettoriale avente la stessa direzione di  $m$ . La matrice che rappresenta la trasformazione lineare  $A'$  è  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , da cui

$$S' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 + 4 \end{pmatrix}$$

(iii) Si ha

$$(S \circ S')\mathbf{x} = S(S'\mathbf{x}) = S \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 + 4 \end{pmatrix}$$

(iv) Si ha

$$(S' \circ S)\mathbf{x} = S'(S\mathbf{x}) = S' \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 + 4 \end{pmatrix} = (S \circ S')\mathbf{x}$$

(v) Sono la rotazione di angolo  $\pi$  attorno al punto  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  di intersezione tra  $l$  e  $m$  (verificarlo!).

(17) Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(i) Calcolare l'orientazione di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .

(ii) Calcolare l'orientazione di  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$ .

(iii) Sia  $S_0$  la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Calcolare  $\text{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$ .

(iv) Sia  $S_\varphi$  la riflessione rispetto alla retta passante per  $\mathbf{0}$  e formante un angolo  $\varphi$  con l'asse delle ascisse. Calcolare  $\text{Or}(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$ .

*Sol.* (i) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

dunque  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono orientati positivamente. (ii)  $\text{Or}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  dunque  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  sono orientati negativamente. (iii)  $\text{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w})) = \det(S_0)\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  (iv)  $\text{Or}(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w})) = \det(S_\varphi)\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

(18) Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(i) Sia  $R_{\pi/2}$  la rotazione di centro  $\mathbf{0}$  e angolo  $\pi/2$ . Calcolare  $\text{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w}))$ .

(ii) Sia  $R_\varphi$  la rotazione di centro  $\mathbf{0}$  e angolo  $\varphi$ . Calcolare  $\text{Or}(R_\varphi(\mathbf{v}), R_\varphi(\mathbf{w}))$ .

*Sol.* (i) I vettori sono quelli dell'esercizio precedente, sappiamo pertanto che sono orientati positivamente.  $\text{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w})) = \det(R_{\pi/2})\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ . (ii)  $\text{Or}(R_\varphi(\mathbf{v}), R_\varphi(\mathbf{w})) = \det(R_\varphi)\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ .

(19) Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Siano  $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(t)}$  le riflessioni rispetto a delle rette passanti per

$\mathbf{0}$ . Sia  $S = S^{(1)} \circ S^{(2)} \circ \dots \circ S^{(t)}$ . Calcolare l'orientazione  $\text{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w}))$ .

*Sol.*  $\text{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w})) = \det(S)\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(S^{(1)}) \cdots \det(S^{(t)})\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (-1)^t \text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ .

(20) Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$

Interpretare geometricamente il risultato.

*Sol.* La matrice data rappresenta la riflessione rispetto all'asse delle ascisse seguita dalla rotazione di angolo  $2\varphi$  attorno all'origine. Si ha

$$\det \begin{pmatrix} \cos 2\varphi - \lambda & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

pertanto gli autovalori della matrice data sono

$$\lambda_{1/2} = \pm 1$$

Per determinare l'1-autospazio risolviamo

$$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi - 1 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione di un autospazio è compresa tra 1 e la molteplicità algebrica dell'autovalore corrispondente. Dunque lo spazio delle soluzioni di questo sistema avrà dimensione esattamente uguale ad uno. Ricordiamo che

$$\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \varphi; \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

e dunque il sistema si può riscrivere come

$$\begin{pmatrix} -2 \sin \varphi & 0 \\ 0 & 2 \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni di questo sistema contengono le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ . Per le ragioni dimensionali espresse sopra, l'1 autospazio è dunque esattamente la retta  $l_\varphi$  che forma un angolo  $\varphi$  con l'asse delle ascisse, ovvero la trasformazione lineare data fissa la retta  $l_\varphi$ . Essendo una isometria lineare deve pertanto essere la riflessione rispetto a  $l_\varphi$ : l'altro autospazio è la retta ortogonale a  $l_\varphi$ , formata dai vettori della forma  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$ .

(21) Calcolare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \varphi \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Interpretare geometricamente il risultato. Cosa succede per  $\varphi = k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ?

*Sol.* La matrice data rappresenta la rotazione di angolo  $\varphi$  attorno all'origine. Si ha

$$\det \begin{pmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1$$

pertanto gli autovalori della matrice data sono

$$\lambda_{1/2} = \cos \varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi$$

(ovvero, per chi conosce la formula di Eulero,  $\lambda_{1,2} = e^{\pm \sqrt{-1} \varphi}$ ). Ne segue che, per  $\varphi \neq k\pi$ , con  $k \in \mathbf{Z}$ , la matrice data non ha autovalori reali e dunque non ci sono rette fissate dalla trasformazione lineare associata. Per  $\varphi = k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , gli assi coordinati sono rette fissate dalla rotazione data.

(22) Sia  $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ . Interpretare geometricamente l'isometria  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ .

*Sol.* Si ha  $M = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix}$ , dunque  $M$  è la rotazione di centro  $\mathbf{0}$  e angolo  $\pi/4$ .

(23) Sia  $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ . Interpretare geometricamente l'isometria  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ .

*Sol.* Si ha  $M = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , dunque  $M$  è la riflessione rispetto all'asse delle ascisse seguita dalla rotazione di centro  $\mathbf{0}$  e angolo  $\pi/4$ .