GEOMETRIA (Ingegneria Medica e Civile) (Geatti) ESONERO 2 Roma, 3 maggio 2005, 13,30–15,30.

COGNOME .... *NOME* .... Medica......... Civile.........

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare il nucleo di F, esibendone possibilmente una base.
   (b) Determinare una base per l'immagine $F(\mathbf{R}^3)$.
   (c) Dire se F è iniettiva e se F è suriettiva, motivando le risposte.

(a) Il nucleo di F è il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}, \quad \text{ossia} \quad \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

In questo caso, trattandosi del sottospazio banale, non c'e base da esibire.

(b) L'immagine $F(\mathbf{R}^3)$ è generata ad esempio dai vettori colonna della matrice rappresentativa:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

È facile verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti, e dunque costituiscono una base dell'immagine $F(\mathbf{R}^3)$.

(c) Poiché il nucleo è ridotto al solo elemento $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, l'applicazione è iniettiva; l'applicazione non è, né potrebbe essere in alcun caso, suriettiva perché $\dim F(\mathbf{R}^3) = 3 < \dim \mathbf{R}^4$ e dunque $F(\mathbf{R}^3) \neq \mathbf{R}^4$.

2. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\}$ in dominio e codominio.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2, \mathcal{C} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^2, \mathcal{C} \\ \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & & \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ \mathbf{R}^2, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}=?} & \mathbf{R}^2, \mathcal{B} \end{array}$$

La matrice cercata $\tilde{A}$ è data da

$$\tilde{A} = C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \circ A \circ C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare autovalori e autospazi di F.
(b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F.
(c) Dire se è diagonalizzabile, motivando la risposta.

(a) Il polinomio caratteristico della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è dato da $p_\lambda(A) = \lambda^3$, da cui segue che F ha come unico autovalore $\lambda = 0$, con molteplicità algebrica 3. L'autospazio corrispondente V_0 è dato da

$$V_0 = \ker F = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid AX = O\} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}\} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

(b) Poiché $\dim V_0 = 1$, un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F contiene al più un autovettore non nullo di F. Ad esempio $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(b) Poiché non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ fatta di autovettori di F, l'applicazione non è diagonalizzabile.

4. Siano $F\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ e $G\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ le applicazioni lineari date rispettivamente da

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere le formule generali per $G \circ F$.
(b) Determinare una base per $U \cap \ker(G \circ F)$, dove $U = \{X \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 = 0\}$.
(c) Determinare la dimensione di $G \circ F(U)$, ossia dell'immagine di U tramite $G \circ F$.

(a) Le formule generali per $G \circ F$ sono date da

$$G \circ F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

(b) Il sottospazio $U \cap \ker(G \circ F)$ di $\mathbf{R}^4$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}, \qquad \text{ossia} \quad span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

(c) Poiché la dimensione di U è uguale a 3 e la dimensione di $U \cap \ker(G \circ F)$ è uguale a 1, segue che la dimensione di $G \circ F(U)$ è uguale a $3 - 1 = 2$. Chi non ci crede, può verificare che una base di U è data da $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, mentre una base di $G \circ F(U)$ è data da $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

5. (**Solo Medica**) Sia $R_{\theta,P}\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la rotazione di un angolo $\theta = \pi/4$ intorno al punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Scrivere le formule generali per $R_{\theta,P}$.
   (b) Calcolare $R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$, $R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix})$, $R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.

(a) La rotazione cercata è data dalla composizione $R_{\theta,P} = T_P \circ R_\theta \circ T_{-P}$, dove T_P indica la traslazione di passo P ed R_θ indica la rotazione (in senso antiorario) di un angolo θ intorno all'origine. (si trasla il centro di rotazione P nell'origine, si ruota intorno all'origine, si riporta l'origine in P) In coordinate, per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\theta = \pi/4$, troviamo

$$R_{\theta,P} = T_P \circ R_\theta \circ T_{-P} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T_P \circ R_\theta \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix} = T_P \circ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= T_P \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2\ x_1 - \sqrt{2}/2\ x_2 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2\ x_1 + \sqrt{2}/2\ x_2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2\ x_1 - \sqrt{2}/2\ x_2 - \sqrt{2} + 2 \\ \sqrt{2}/2\ x_1 + \sqrt{2}/2\ x_2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}/2 + 2 \\ 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \qquad R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Osservazione: $R_{\theta,P}$ lascia fisso il centro di rotazione P; poiché il centro di rotazione P non è l'origine, $R_{\theta,P}$ non è linerae.

5. (**Solo Civile**) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare $\det A$, $\det B$, $\det(A^2B)$, $\det(A^{-1})$, $\det(B^t)$.
   (b) Calcolare A^{-1}.

(a) $\det A = 1 + 1 = 2$, $\det B = 0$, $\det A^2B = (\det A)^2 \det B = 4 \cdot 0 = 0$, $\det(A^{-1}) = 1/\det A = 1/2$, $\det(B^t) = \det B = 0$.

(b) Calcoliamo l'inversa di A con il metodo di eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

L'inversa di A è data da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \qquad \text{Prova}: \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$