GEOMETRIA (Ingegneria Medica e Civile) (Geatti) ESONERO 1 Roma, 5 aprile 2005, 17–19.

COGNOME .... *NOME* .... Medica......... Civile.........

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ dato da* $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0 \right\}$ *e siano* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. *Determinare quali fra gli insiemi di vettori* $\{A, B\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ *costituiscono una base di W. Motivare bene le risposte.*

Risolvendo l'equazione che definisce W, troviamo $W = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$. Di conseguenza il sottospazio W ha dimensione due (i due generatori di W sono linearmente indipendenti). Ogni coppia di vettori linearmente indipendenti, *appartenenti a W*, è una base di W.

$\{A, B\}$: non è una base perché $A \notin W$;

$\{A, D\}$: non è una base perché $A \notin W$;

$\{B, C\}$: è una base perché $B, C \in W$ e sono linermente indipendenti;

$\{B, D\}$: non è una base perché $B, C \in W$, ma non sono linermente indipendenti.

2. *Siano dati i vettori* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{R}^3$.
   (i) Verificare che $\mathcal{B} = \{A, B, C\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
   (ii) Calcolare le coordinate di P in $\mathcal{B} = \{A, B, C\}$ ed in $\mathcal{B}' = \{B, C, A\}$.
   (iii) Determinare se P appartiene a $\mathrm{span}\{A, B\}$.
   (iv) Determinare un vettore $D \in \mathbf{R}^3$, diverso da C, in modo che $\{A, B, D\}$ sia una base di $\mathbf{R}^3$.

(i) Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

troviamo che i vettori $\{A, B, C\}$ sono indipendenti e dunque formano una base di $\mathbf{R}^3$.

(ii) Le coordinate di P in $\mathcal{B} = \{A, B, C\}$ sono date dalla terna *ordinata* di numeri reali $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tali che

$$aA + bB + cC = P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ b = 2 \\ 3a + b + 7c = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = -1,\ b = 2,\ c = 4/7.$$

Le coordinate di P in $\mathcal{B} = \{A, B, C\}$ sono $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4/7 \end{pmatrix}$ e quelle in $\mathcal{B}' = \{B, C, A\}$ sono $\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4/7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Il punto P appartiene a $\mathrm{span}\{A, B\}$ se e solo se $c = 0$. Dunque $P \notin \mathrm{span}\{A, B\}$.

(iv) D può essere un qualunque vettore tale che $\{A, B, D\}$ siano linearmente indipendenti; ad esempio $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, oppure $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, etc...

3. (Civile) *Sia dato il sottoinsieme* $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}\}$ *di* $\mathbf{R}^2$.
   (i) Disegnare U.
   (ii) Usando la definizione, determinare se U *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}^2$.

(i) U è il quadrante positivo del piano (semiassi e origine inclusi).

(ii) Siano $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a, b \geq 0$ e $u_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $c, d \geq 0$ due elementi generici di U. La loro somma $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ appartiene a U, in quanto $a + c,\ b + d \geq 0$. Invece, per $\lambda < 0$, si ha che $\lambda u_1 = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$ non appartiene a U, perché in questo caso $\lambda a, \lambda b$ sono negativi. Dunque U non è un sottospazio vettoriale di U.

3. (Medica)*Sia* π *il piano in* $\mathbf{R}^3$ *di equazione* $x_1 - x_3 = 0$ *e sia* $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare la distanza del punto P *da* π.
   (ii) Scrivere in forma parametrica una retta passante per P *e parallela a* π.

(i) La distanza del punto P dal piano π è la distanza di P dalla sua proiezione ortogonale Q su π:

$$d(P, \pi) = d(P, Q).$$

Il punto Q si trova intersecando con π la retta per P, perpendicolare a π. La retta per P, perpendicolare a π, ha equazioni parametriche

$$r: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(il vettore della direzione della retta è parallelo al vettore normale al piano $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$). L'intersezione $r \cap \pi$ è data dal punto $Q = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, corrispondente al valore del parametro $t = 1/2$. In conclusione

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \|P - Q\| = \| \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{1/4 + 1/4} = \sqrt{2}/2.$$

(ii) Una retta passante per P e parallela a π è una qualunque retta della forma $X = p + tA$, dove A è un vettore ortogonale al vettore normale al piano $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Per esempio

$$s: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Siano dati* $U = \text{span}\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \}$ *e* $W = \{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}$ *in* $\mathbf{R}^4$.

(i) Determinare la dimensione di U ed esibirne una base.
(ii) Determinare la dimensione di W ed esibirne una base.
(iii) Determinare una base di $U + W$ ed esibire un vettore non nullo in $U \cap W$.
(iv) Determinare la dimensione di $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

(i) Mediante l'eliminazione di Gauss sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

troviamo che i generatori di U sono linearmente indipendenti. Dunque $\dim U = 3$. Una base di U è data dai vettori stessi $\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \}$, oppure dai vettori $\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \}$.

(ii) Risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce W troviamo

$$W = \text{span}\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \}.$$

I vettori $\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \}$ sono generatori linearmente indipendenti di W. Dunque sono una base di W e $\dim W = 2$.

(iii) Il sottospazio $U + W$ è dato da

$$U + W = \text{span}\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \}.$$

Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta che una base di $U + W$ è data dai vettori

$$\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \}.$$

Ne segue che $\dim U + W = 4$ e $U + W = \mathbf{R}^4$. Il vettore $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ appartiene a U e soddisfa le equazioni di W. Dunque è un vettore non nullo in $U \cap W$.

(iv) Poichè $\dim U + W = 4$, per le formule di Grassman si ha

$$\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1.$$