1. *Siano date le matrici*

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&5\\3&1&0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&4&1\\1&-1&0&8\\1&-1&0&8\\0&-2&0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\1&8\\-1&5\\2&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare tutti i possibili prodotti fra coppie di matrici dell'insieme $\{A,\ B,\ C,\ D\}$.
(ii) Calcolare le matrici trasposte ${}^tA,\ {}^tB,\ {}^tC,\ {}^tD$.
(iii) Calcolare tutti i possibili prodotti fra coppie di matrici dell'insieme $\{{}^tA,\ {}^tB,\ {}^tC,\ {}^tD\}$.

Soluzione.
(i) Tutti i possibili prodotti sono:

$$AB=\begin{pmatrix}1&-11&4&9\\1&-7&12&11\end{pmatrix},\ AC=\begin{pmatrix}10&5\\10&8\end{pmatrix},\ BC=\begin{pmatrix}-2&20\\16&-8\\16&-8\\-2&-16\end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix}4&-6&0&32\\-1&-15&4&-7\\-1&-15&4&-7\\-2&2&0&-16\end{pmatrix}$$

$$CD=\begin{pmatrix}1&0&0\\17&16&16\\-9&10&10\\2&0&0\end{pmatrix},\quad CA=\begin{pmatrix}1&0&1&5\\25&8&1&29\\14&5&-1&10\\2&0&2&10\end{pmatrix}.$$

(ii) Le matrici trasposte sono:

$${}^tA=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\\1&0\\5&3\end{pmatrix},\quad {}^tB=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&-1&-1&-2\\4&0&0&0\\1&8&8&0\end{pmatrix},\quad {}^tC=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&8&5&0\end{pmatrix},\quad {}^tD=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\\0&2\end{pmatrix}.$$

(i) Tutti i possibili prodotti sono:

$${}^tA{}^tC={}^t(CA),\ \ ({}^tB)^2={}^t(B^2),\ \ {}^tB{}^tA={}^t(AB),\ \ {}^tC{}^tA={}^t(AC),\ \ {}^tC{}^tB={}^t(BC),\ \ {}^tD{}^tC={}^t(CD).$$

2. *Siano* $A=\begin{pmatrix}2&-6\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&3\\3&7\end{pmatrix}$. *Calcolare* $A\cdot(B\cdot C)$ *e* $(A\cdot B)\cdot C$.

Soluzione.

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}2&-6\\-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-9&-18\\12&28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-90&-204\\45&102\end{pmatrix}=(A\cdot B)\cdot C,$$

per l'associatività del prodotto fra matrici.

3. *Determinare due matrici* A, B *per cui esiste* $A\cdot B$ *ma non esiste* $B\cdot A$.

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Determinare due matrici non quadrate A, B per cui esistono entrambi i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e calcolarli.*

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 10 \\ -3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. *Determinare due matrici quadrate A, B per cui i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono diversi: $A \cdot B \neq B \cdot A$.*

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. *Determinare due matrici $A \neq B$, diverse dalla matrice nulla O, tali che $A \cdot B = O$.*

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. *Determinare una matrice A, diversa dalla matrice nulla O, tale che $A^2 = O$.*

Soluzione. Una matrice A con queste proprietà deve essere non invertibile. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. *Determinare una matrice A, diversa dalla matrice identità, tale che $A^2 = A$.*

Soluzione. Una matrice A con queste proprietà deve essere non invertibile, altrimenti moltiplicando entrambi i termini dell'equazione per A^{-1} si troverebbe $A = I_2$. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

9. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Determinare due matrici* B, C *quadrate* 2×2, *diverse tra loro* $B \neq C$, *tali che* $A \cdot B \neq A \cdot C$.

Soluzione. Questo è possibile perché A è non invertibile, altrimenti moltiplicando entrambi i termini dell'equazione per A^{-1} si troverebbe $B = C$. Ad esempio

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad AC = AB = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. *Siano* $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. *Calcolare* ${}^tA \cdot {}^t(B \cdot C)$ *e* ${}^t(A \cdot B) \cdot {}^tC$.

Soluzione.

$${}^tA \cdot {}^t(B \cdot C) = {}^tA \cdot {}^tC \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix};$$

$${}^t(A \cdot B) \cdot {}^tC = {}^tB \cdot {}^tA \cdot {}^tC = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 45 & 15 \end{pmatrix}.$$