1. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \qquad W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}\}.$$

(i) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
(ii) Calcolare $\dim V$, $\dim W$ e $\dim V \cap W$.
(iii) Calcolare $\dim(V + W)$.

(i) Un generico elemento di V è un vettore della forma

$$v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 2\beta \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo per quali valori di α, β il vettore v soddisfa il sistema che definisce W. Sostituendo troviamo

$$\begin{cases} (\alpha - \beta) - (\alpha + \beta) = 0 \\ 2\beta - 2(\alpha + \beta) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Dunque $V \cap W = \{O\}$.

(ii) $\dim V = 2$ (i generatori di V sono linearmente indipendenti); $\dim W = 1$ (il sistema lineare omogeneo che definisce W ha due equazioni indipendenti); $\dim(V \cap W) = 0$.

(iii) $\dim(V + W) = 2 + 1 - 0 = 3$. In particolare, $V + W = \mathbb{R}^3$.

2. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_3 = 0\}.$$

(i) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
(ii) Calcolare le dimensioni $\dim V$, $\dim W$ e $\dim V \cap W$.
(iii) Calcolare $\dim(V + W)$.

Determiniamo per quali valori di α, β il generico vettore $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha + \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \in V$ soddisfa il sistema che definisce W. Sostituendo troviamo

$$\alpha - \alpha = 0.$$

Dunque $V \subset W$. Poiché $\dim V = 2$ e $\dim W = 2$ (il sistema lineare omogeneo che definisce W ha una equazione non banale), si ha che $V = W = V \cap W = V + W$. In particolare, $\dim(V \cap W) = 2$ e $\dim(V + W) = 2 + 2 - 2 = 2$.

3. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$U = span\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \}, \quad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \}.$$

(i) È vero che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$?
(ii) Determinare sottospazi Z e V di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus Z, \qquad \mathbb{R}^3 = W \oplus V.$$

(i) Si ha $\dim U = 1$, $W = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ e $\dim W = 1$. Poiché $\dim U + W \leq 2$, il sottospazio $U + W$ è strettamente contenuto in $\mathbb{R}^3$. Precisamente, $U \cap W = \{O\}$ e $\dim U + W = 2$.
(ii) Per esempio

$$Z = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \quad V = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

Ciò segue dal fatto che le terne

$$\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} \qquad \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

sono indipendenti.

4. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \qquad V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & = 0 \end{cases} \}.$$

(i) Calcolare $U + V$ e $\dim(U + V)$.
(ii) Calcolare $\dim U$, $\dim V$, e $\dim(U \cap V)$.

(i) Si ha

$$V = span\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \quad U + V = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Si vede subito che gli ultimi 4 generatori di $U+V$ sono linearmente indipendenti. Per cui $\dim(U+V)=4$ e $U+V=\mathbb{R}^4$.
(ii) Si verifica facilmente che $\dim U=3$, $\dim V=2$. Per cui $\dim(U\cap V)=3+2-4=1$.

5. Siano

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3;$$

(i) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
(ii) Completarli ad una base di $\mathbb{R}^3$ in tre modi diversi.
(iii) Esibire un complemento per ognuno dei sottospazi: $span\{\mathbf{v}_1\}$, $span\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ e $span\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\}$.

(i) Poiché $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ non sono uno multiplo dell'altro, sono linearmente indipendenti.
(ii) Tre possibili completamenti di $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ sono dati per esempio da

$$\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(iii) $span\{\mathbf{v}_1\}^c=span\{\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$, $span\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}^c=span\{\mathbf{v}_3\}$ e $span\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\}^c=span\{\mathbf{v}_2\}$.

6. Determinare due sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4=U+W$, senza che la somma sia diretta.

Ad esempio

$$U=span\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\},\quad W=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\}.$$

In questo caso $U+W=\mathbb{R}^4$, ma $\dim U\cap W=1$.