1. Apostol: Sezione 1.15, Esercizi 16(a), 17, 18, 19.

2. Determinare le dimensioni dei seguenti sottospazi W ed esibirne due basi basi diverse, quando è possibile:

(i) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} -x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^5;$

(ii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 - x_4 = 0\} \quad \subset \mathbf{R}^4;$

(iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_1 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^3.$

(iv) $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^3;$

(v) $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^3;$

(vi) $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^2.$

Sol. (i) Risolviamo il sistema con l'algoritmo di Gauss-Jordan. La matrice del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice dei coefficienti è già in forma a scala. Ne ricaviamo che il rango della matrice dei coefficienti è uguale a 2. La dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale al numero di variabili meno questo rango, cioé a 3. Per determinare esplicitamente una base di W risolviamo il sistema:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ritraducendo questa matrice in un sistema lineare troviamo

$$\begin{cases} x_1 = (1/2)x_3 \\ x_2 = (1/2)x_3 \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1/2 \\ t_1/2 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbf{R}.$$

Una base di W è data dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una differente base di W è data dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Lo spazio W è descritto da una equazione (non banale) in quattro incognite: la sua dimensione è $4 - 1 = 3$. Per determinarne una base osserviamo che i vettori di W sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_1 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t_i \in \mathbf{R}.$$

Una base di W è pertanto data ai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una differente base di W è data ai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Risolviamo il sistema con l'algoritmo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice dei coefficienti ha rango tre, dunque la dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale a $3 - 3 = 0$. Ne segue che W è lo spazio vettoriale costituito dal solo vettore nullo: $W = \{\mathbf{0}\}$. La base di W è l'insieme vuoto $\emptyset$. Non ci sono altre basi di W.

(iv) Utilizziamo l'algoritmo di Gauss-Jordan per estrarre una base dal sistema di generatori dato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è uguale a 2 e dunque la dimensione di W è uguale a 2. Inoltre poiché i *pivot* sono nella prima e seconda colonna, il primo ed il secondo dei generatori fornito formano una base di W, vale a dire, una base di W è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una differente base di W è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(v) W è uno spazio di dimensione uno. Una sua base è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una differente base è data dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(vi) L'algoritmo di Gauss-Jordan mostra che la dimensione di W è 2. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una base di W è data dai due generatori forniti:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un'altra base è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_3 = 0 \} \qquad V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \};$$

esibirne una base.

Sol. I vettori di U sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbf{R}.$$

dunque una base di U è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per determinare una base di V risolviamo il sistema di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che la soluzione è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

dunque una base di V è data dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \qquad V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & = 0 \end{cases} \}.$$

esibirne una base.

Sol. Per il primo sottospazio abbiamo un sistema di generatori. Per estrarne una base, mettiamo i vettori nelle righe di una matrice e applichiamo ad essa l'eliminazione di Gauss per righe.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots \to \ldots \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una base di U è costituita dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alternativamente: Per estrarne una base utilizziamo l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne corrispondenti ai *pivot* sono la prima, la seconda e la quarta: una base di U è costituita dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare una base di V risolviamo il sistema di due equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & = 0 \end{cases}$$

Si trova facilmente che la soluzione è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbf{R}.$$

Dunque una base di V è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Dimostrare che le seguenti terne di vettori sono basi di $\mathbf{R}^3$

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Calcolare le coordinate dei vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in ognuna di esse.

Sol. Usiamo in tutti e tre i casi l'agoritmo di Gauss-Jordan, scrivendo una matrice che ha a sinistra i tre vettori dati e a destra i vettori v e w. I tre vettori dati sono una base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se riusciamo a trasformare la parte a sinistra della matrice così ottenuta nella matrice identica 3×3 mediante operazioni elementari sulle righe. In tal caso le due colonne a destra della matrice trasformata sono le coordinate dei vettori v e w nella base formata dai tre vettori dati.

(i)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

(iii)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$