1. Determinare quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$, giustificando le risposte:

(i) $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \}$.

(ii) $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + z = 1 \}$.

(iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 - y = 0 \}$.

Sol. (i) L'insieme U è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in tre incognite, dunque è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
(ii) L'insieme V non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$; ad esempio, non contiene il vettore zero.
(iii) L'insieme W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$; ad esempio, il vettore $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a W, ma $2X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ non appartiene a W.

2. Scrivere i seguenti sottospazi come Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, per opportuni vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.

(i) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^5$;

(ii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0 \} \quad \subset \mathbf{R}^4$;

(iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^3$.

Sol. (i) Risolvendo il sistema di due equazioni in cinque variabili

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

troviamo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}t_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

(ii) Stavolta si tratta di un sistema di una sola equazione in quattro variabili:

$$x_1 + 2x_3 = 0$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} x_1 = -2t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

(iii) La soluzione del sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

è

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Pertanto lo spazio vettoriale W si riduce al solo vettore nullo. La sua base è l'insieme vuoto.

3. Trovare equazioni cartesiane per i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^2$:
   (i) $U = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \}$;
   (ii) $V = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \}$;

Sol. (i) Il sottospazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è la retta del piano passante per l'origine e per il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Questa retta ha equazione cartesiana $3y - 2x = 0$.

Alternativamente:
Il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartiene allo spazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$$

è uguale ad uno. Dall'eliminazione gaussiana otteniamo

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x/3 \\ 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x/3 \\ 0 & y - 2x/3 \end{pmatrix}$$

Chiaramente questa matrice ha rango uno se e solo se $3y - 2x = 0$, e dunque questa è l'equazione cartesiana cercata.
(ii) Iniziamo con l'osservare che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ è multiplo del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e dunque

$$\text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

Il sottospazio cercato è la retta del piano per l'origine e per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Questa retta ha equazione cartesiana $y - 2x = 0$.

Alternativamente:
Iniziamo con l'osservare che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ è linearmente dipendente dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e dunque

$$\text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

e dunque si tratta di uno spazio di dimensione uno. Pertanto il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ apparterrà allo spazio V se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}$$

sarà uguale ad uno. Dall'eliminazione gaussiana otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y - 2x \end{pmatrix}$$

Chiaramente questa matrice ha rango uno se e solo se $y - 2x = 0$, e dunque questa è l'equazione cartesiana cercata.

4. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$W_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \quad W_2 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

decidere se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ oppure nessuna delle due.

Sol. Si ha che $W_1 \subseteq W_2$ se e solo se entrambi i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ appartengono a W_2. Si vede facilmente che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

mentre

$$\text{non esistono } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \text{tali che} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(il sistema lineare corrispondente è incompatibile). Ne segue che

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_2 \quad \text{e} \quad W_1 \not\subseteq W_2.$$

Allo stesso modo si ha che $W_2 \subseteq W_2$ se e solo se entrambi i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartengono a W_1. Si verifica che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_1.$$

Quindi $W_2 \not\subseteq W_1$.

Alternativamente:

Si verifica facilmente (ad esempio mediante eliminazione gaussiana) che i sistemi di generatori forniti sono costituiti da vettori linearmente indipendenti e dunque sia W_1 che W_2 risultano essere sottospazi di dimensione due. Chiaramente $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ se e solo se $\dim(W_1+W_2) = 2$. Ma

$$W_1 + W_2 = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

e dunque avrà dimensione 2 se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Ma l'eliminazione gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ci mostra che il rango di questa matrice è in effetti uguale a 3: nessuna delle due inclusioni è vera.

5. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$W_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\} \qquad W_2 = \{x_1 - x_2 - x_3 = 0\},$$

decidere se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$ oppure nessuna delle due.

Sol. si vede facilmente che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a W_1 (è uno dei generatori), ma non a W_2 (le sue coordinate non soddisfano l'equazione che definisce W_2). Dunque $W_1 \not\subseteq W_2$. Si ha che

$$W_2 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1.$$

Dunque $W_2 \not\subseteq W_1$.
Alternativamente:
Anche in questo caso si vede facilmente che sia W_1 che W_2 hanno dimensione due. Dunque un'inclusione equivale a $W_1 = W_2$. Ma si vede facilmente che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a W_1 (è uno dei generatori), ma non a W_2 (le sue coordinate non soddisfano l'equazione che definisce W_2). Dunque nessuna delle due inclusioni è vera.