1. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $F(X) = A \cdot X$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Far vedere che i vettori

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1,$$

formano una base per $\mathbf{R}^3$.

(ii) Calcolare la matrice di F rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ in dominio e codominio.

Sol. (i) Le coordinate dei vettori $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ rispetto alla base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sono

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per dimostrare che $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ basta mostrare che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango tre, il che si verifica facilmente mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan.

(ii) Chiamiamo $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ e consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & & \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$

Se $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla bace canonica $\mathcal{C}$ (quello facile da scrivere), la matrice cercata $\tilde{A}$ è data da

$$\tilde{A} = C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} A C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} A C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Siano
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
vettori in $\mathbf{R}^3$.

(i) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.

Sia $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione che permuta i vettori $\mathbf{v}_i$.
$$A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, \quad A(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, \quad A(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1.$$
(ii) Calcolare la matrice di A rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

(iii) Calcolare la matrice di A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(iv) Calcolare la matrice di A^3 rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Sol. (i) Basta mostrare che la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
ha rango tre, il che si vede facilmete utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan.

(ii) Si tratta della matrice
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(iii) Consideriamo il diagramma
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{A=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \big\downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} & & \big\uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$
dove $\mathcal{B}$ indica la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Se $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, la matrice cercata A è data da
$$A = B\tilde{A}B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$
(iv) Si ha
$$(B\tilde{A}B^{-1})^3 = B\tilde{A}B^{-1}B\tilde{A}B^{-1}B\tilde{A}B^{-1} = B\tilde{A}^3B^{-1}$$
Ma
$$\tilde{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
e dunque
$$(B\tilde{A}B^{-1})^3 = B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}B^{-1} = BB^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinare la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ e la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica e $\mathcal{B}$ è data di volta in volta da

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \quad \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Sol. Per i cambiamenti di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ si tratta delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per i cambiamenti di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ si tratta delle loro inverse, vale a dire

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Determinare la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ e la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica e $\mathcal{B}$ è data di volta in volta da

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \ \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \ \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Sol. Per i cambiamenti di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ si tratta delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per i cambiamenti di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ si tratta delle loro inverse, vale a dire

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Sia

$$V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

e sia $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che $A(\mathbf{x}) \in V$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.

Sia $A_{|V}$ l'applicazione A *ristretta* a V.

(ii) Trovare una base per V.

(iii) Calcolare la matrice rappresentativa della applicazione $A_{|V}$ rispetto a questa base.

Sol. (i) Basta dimostrare che $A(\mathcal{B}) \subseteq V$, dove $\mathcal{B}$ è una qualunque base di V. Dall'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ricaviamo che i vettori di V sono tutti e soli i vettori di $\mathbf{R}^3$ della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che una base di V è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcoliamo $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, che appartiene a V in quanto le sue coordinate soddisfano l'equazione che definisce il sottospazio V. In modo analogo si osserva che $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio V.

(ii) Abbiamo già risolto questo problema al punto (i).

(iii) Si ha

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice che rappresenta $A|_V$ nella base $\mathcal{B}$ è la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Sia $V \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio dato da

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \end{cases} \right\}$$

sia $F : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare $X \mapsto AX$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Dimostrare che se $\mathbf{x} \in V$, allora $F(\mathbf{x}) \in V$.

(ii) Determinare una base per V e calcolare la matrice rappresentativa dell' applicazione F ristretta a V

$$F_{|V} : V \longrightarrow V$$

rispetto a questa base.

(iii) Calcolare il nucleo e l'immagine della applicazione $F_{|V}$.

Sol. (i) Basta dimostrare che $A(\mathcal{B}) \subseteq V$, dove $\mathcal{B}$ è una qualunque base di V. Dalle equazioni che definiscono V si ricava facilmente che una base di V è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcoliamo $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, che appartiene a V in quanto le sue coordinate soddisfano l'equazione che definisce il sottospazio V. Il vettore $F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene chiaramente al sottospazio V.

(ii) Si ha

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice che rappresenta $F|_V$ nella base $\mathcal{B}$ è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Il generico vettore di V si scrive come

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il nucleo di $F|_V$ è caratterizzato dall'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero $\alpha = 0$ e β qualsiasi. Ne segue che

$$\ker F|_V = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

In termini delle coordinate $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, l'immagine di $F|_V$ è data da

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Dunque

$$\text{Im}F|_V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbf{R}^4$$

7. Sia A la matrice $n \times n$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (i) Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base standard di $\mathbf{R}^n$. Far vedere che

$$\begin{aligned} Ae_1 &= 0, \\ Ae_i &= e_{i-1}, \qquad \text{per ogni } i > 1. \end{aligned}$$

   (ii) Calcolare A^2.
   (iii) Per ogni $n > 0$ calcolare A^n e determinarne il nucleo e l'immagine.

Sol. (i) E' immediato dalla definizione di matrice associata ad un'applicazione linerae rispetto ad una coppia di basi.
(ii) Si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Si vede facilmente che $A^n = 0$ dunque $\ker A^n = \mathbf{R}^n$ e $\text{Im}A^n = \{0\}$.

8. Sia $M(2, 2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Sia

$$F \colon M(2, 2, \mathbf{R}) \longrightarrow M(2, 2, \mathbf{R}), \quad M \mapsto {}^tM$$

   l'applicazione che associa ad una matrice la sua trasposta.
   (i) Far vedere che F è lineare.
   (ii) Scegliere una base in $M(2, 2, \mathbf{R})$ e determinare la matrice rappresentativa di F rispetto a quella base in dominio e codominio.

Sol. (i) Per definizione di trasposta,

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Pertanto, se $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, allora

$$F(A_1 + A_2) = F\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = F(A_1) + F(A_2)$$

In modo analogo si vede che

$$F(\lambda \cdot A) = F\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \lambda F(A)$$

Dunque F è un'applicazione lineare.
(ii) Scegliamo come base la base canonica di $M(2, 2\mathbf{R})$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Rispetto a questa base, l'applicazione F è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$