

1. Sia $F: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix},$$

e siano dati i sottospazi

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

- (i) Determinare $\ker F$ e dire se F è iniettiva.
- (ii) Determinare l'immagine $F(\mathbf{R}^4)$, esibendone una base.
- (iii) Calcolare $\dim U$, $U \cap \ker F$, $\dim F(U)$, esibire una base di $F(U)$.
- (iv) Calcolare $\dim W$, $W \cap \ker F$, $\dim F(W)$, esibire una base di $F(W)$.
- (v) Spiegare i risultati ottenuti in (iii) e (iv).

Sol. (i) Determinare il nucleo di F equivale a risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Poiché il nucleo di F è non banale (ha dimensione

1) l'applicazione F non è iniettiva.

(ii) L'immagine $F(\mathbf{R}^4)$ è generata dalle colonne della matrice che rappresentativa di F , ovvero della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, si vede facilmente che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti, mentre la quarta colonna dipende linearmente dalle prime tre. Ne segue che una base di $F(\mathbf{R}^4)$ è costituita dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, l'immagine di F ha dimensione 3.

(iii) Utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan si vede facilmente che i generatori dati per U sono linearmente indipendenti, da cui $\dim U = 2$. Per determinare $\ker F \cap U$ sostituiamo le coordinate di un generico vettore di U

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

nelle equazioni del sistema lineare che definisce $\ker F$. Troviamo che necessariamente $a = b = 0$, per cui $\ker F \cap U$ è il vettore nullo di \mathbf{R}^4 .

Alternativamente: risolviamo

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

ovvero

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

E' immediato verificare che l'unica soluzione di questo sistema è quella banale, ovvero $a = b = c = 0$. Sostituendo i valori $a = b = c = 0$ nell'equazione (*), troviamo che $\ker F \cap U = \{0\}$.

Lo spazio $F(U)$ è generato dai due vettori

$$F \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sono linearmente indipendenti, pertanto sono una base di $F(U)$, che ha dimensione 2.

(iv) In modo del tutto analogo al punto (ii) si trova che $\dim W = 2$. Per determinare $\ker F \cap W$ sostituiamo le coordinate di un generico vettore di W

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

nelle equazioni del sistema lineare che definisce $\ker F$. Troviamo che necessariamente $a = -b$, per cui $\ker F \cap W$ è il sottospazio di \mathbf{R}^4 generato dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Alternativamente: risolviamo

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (**)$$

ovvero

$$\begin{cases} -a + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $a = -b = c$. Sostituendo $a = -b = c$ nell'equazione (***) si trova che $\ker F \cap W$ è

lo spazio generato da $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e coincide con $\ker F$. Lo spazio $F(W)$ è generato dai due vettori

$$F \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Essi sono linearmente dipendenti (sono addirittura uguali) pertanto una base è costituita da uno solo di essi; la dimensione di $F(W)$ è 1.

(v) In generale, se $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ è un'applicazione lineare, vale

$$\dim \varphi(V_1) = \dim V_1 - \dim \ker \varphi$$

Se prendiamo $V_1 = U$, $V_2 = \mathbf{R}^4$ e $\varphi = F|_U$ (F ristretta al sottospazio U), otteniamo

$$\dim F|_U(U) = \dim U - \dim \ker(F|_U)$$

Ma $F|_U(U) = F(U)$ e $\ker(F|_U) = \ker F \cap U$, da cui

$$\dim F(U) = \dim U - \dim(\ker F \cap U)$$

in accordo con quanto trovato al punto (iii). Il risultato del punto (iv) si spiega allo stesso modo.

2. Sia $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$F \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare $\ker F$ e $\text{Im}(F)$ esibendone delle basi.
- (ii) È possibile determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$, di dimensione 2, tale che $\dim U = \dim F(U)$? Se sì, determinarlo. Se no, spiegare perché.
- (iii) È possibile determinare un sottospazio $W \subset \mathbf{R}^3$, di dimensione 1, tale che $\dim W = \dim F(W)$? Se sì, determinarlo. Se no, spiegare perché.

Sol. (i) Si vede subito che $\ker F$ è l'insieme dei vettori della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, ovvero $\ker F =$

$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Altrettanto immediato è osservare che l'immagine di F è $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) Dalla formula per le dimensioni scritta al punto (v) dell'esercizio precedente sappiamo che il problema equivale a determinare un sottospazio U di dimensione 2 di \mathbf{R}^3 tale $\dim(U \cap \ker F) = 0$. Ma $\dim(\ker F) = 2$ e dalla formula di Grassmann

$$\dim(U \cap \ker F) = \dim(U) + \dim(\ker F) - \dim(U + \ker F) \geq 2 + 2 - 3 = 1$$

Dunque non esiste alcun sottospazio U con $\dim(U) = \dim F(U) = 2$.

(iii) Il problema è del tutto analogo al precedente. In questo caso, però, $\dim(W) = 1$ e dunque W è abbastanza piccolo ed è possibile sceglierlo in modo che non intersechi $\ker F$ se non nello 0. Più

formalmente, dato che uno spazio W di dimensione uno è della forma $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$, l'unica

condizione da soddisfare affinché $W \cap \ker F = \{0\}$ è

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \notin \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ovvero $a \neq 0$.

3.

- (i) Scrivere un'applicazione lineare iniettiva $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se sì, determinarla. Se no, spiegare perché.
- (ii) Scrivere un'applicazione lineare iniettiva $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se sì, determinarla. Se no, spiegare perché.
- (iii) Scrivere un'applicazione lineare suriettiva $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$.
- (iv) Scrivere un'applicazione lineare suriettiva $F: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se sì, determinarla. Se no, spiegare perché.

Sol. (i) L'applicazione identica da \mathbf{R}^3 in \mathbf{R}^3 è sia iniettiva che suriettiva. Più in generale le applicazioni sia iniettive che suriettive da \mathbf{R}^3 in sè si caratterizzano come quelle rappresentate da matrici 3×3 aventi rango 3.

(ii) L'applicazione

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è iniettiva. Più in generale le applicazioni iniettive da \mathbf{R}^3 in \mathbf{R}^4 sono tutte e sole quelle rappresentate da una matrice 4×3 avente rango 3. Non possono esistere applicazioni suriettive da \mathbf{R}^3 in \mathbf{R}^4 in quanto la dimensione dell'immagine di un'applicazione è sempre minore o uguale alla dimensione dello spazio di partenza (dominio dell'applicazione).

(iii) Abbiamo già scritto un'applicazione suriettiva da \mathbf{R}^3 in sè al punto (i). Più in generale, le applicazioni suriettive da \mathbf{R}^3 in sè si caratterizzano come quelle rappresentate da matrici 3×3 aventi rango 3 (e sono automaticamente anche iniettive).

(iv) L'applicazione

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

è suriettiva. Più in generale le applicazioni suriettive da \mathbf{R}^5 in \mathbf{R}^3 sono tutte e sole quelle rappresentate da una matrice 3×5 avente rango 3. Non possono esistere applicazioni iniettive da \mathbf{R}^5 in \mathbf{R}^3 in quanto la dimensione del nucleo di un'applicazione è sempre maggiore o uguale alla differenza tra la dimensione dello spazio di partenza (dominio dell'applicazione) e quella dello spazio di arrivo (codominio dell'applicazione). In questo caso stiamo dicendo che il nucleo di una qualunque applicazione $F: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ha dimensione almeno 2.

4. Sia $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ un'applicazione lineare, tale che

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, $F\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$, $F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, $F\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Sol. Indichiamo con \mathcal{B} l'insieme dei tre vettori

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

È immediato verificare che si tratta di una base di \mathbf{R}^3 . Il dato fornito su F pertanto si interpreta come: la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, rispetto alla base \mathcal{B} nello spazio di partenza e la base canonica nello spazio di arrivo è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, rispetto alla base canonica nello spazio di partenza e nello spazio di arrivo è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/3 \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto,

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/3 \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -8/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -10/3 \\ 5/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 16/3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -25/3 \\ -4/3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix},$$