COGNOME NOME Medica..... Civile.....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*.
 Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Siano dati i sottospazi $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x_2 - x_4 = 0 \right\}$ e $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 = x_3 = 0 \right\}$.

- (a) Determinare una base di U , una base di V , una base di $U + V$ e una base di $U \cap V$.
 (b) Determinare se vale l'inclusione $U \subseteq V$ oppure l'inclusione $V \subseteq U$.

(a) Risolvendo i sistemi che definiscono U , V e $U \cap V$ troviamo

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad U \cap V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

In tutti e tre i casi si tratta di generatori linearmente indipendenti, per cui una base di U , una base di V e una base di $U \cap V$ sono date rispettivamente da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il sottospazio $U + V$ è dato da

$$U + V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

ma questi generatori non sono linearmente indipendenti (ce ne sono due che sono uno multiplo dell'altro).
 È facile verificare che i vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sono una base di $U + V$. Infatti $U + V$ ha dimensione 4 e coincide con $\mathbf{R}^4$; quattro qualunque vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^4$ sono una base di $\mathbf{R}^4$.

(b) Non vale nessuna delle due inclusioni in quanto $\dim U \cap V = 1 \neq \dim U, \dim V$. L'inclusione $U \subset V$ è comunque impossibile, in quanto $\dim U = 3 > 2 = \dim V$.

2. Sia $F: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base dell'immagine $F(\mathbf{R}^4)$ e la dimensione del nucleo di F .

(b) Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$. Determinare una base dell'immagine $F(V)$.

(a) Se $\{e_1, \dots, e_4\}$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$, l'immagine di F è data da

$$F(\mathbf{R}^4) = \text{span}\{F(e_1), F(e_2), F(e_3), F(e_4)\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$

ha dimensione tre ed una sua base è data da

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

La dimensione del nucleo è data da

$$\dim \ker F = \dim \mathbf{R}^4 - \dim F(\mathbf{R}^4) = 4 - 3 = 1.$$

(b) Il sottospazio V è dato da

$$V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

L'immagine $F(V)$ è data da

$$F(V) = \text{span}\left\{F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Poiché $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ sono generatori linearmente indipendenti di $F(V)$, sono anche una base di $F(V)$.

3. **(Solo Medica)** Scrivere le formule della riflessione $R_\pi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ rispetto al piano π di equazione $x_1 - x_2 = 0$. Determinare un'equazione parametrica dell'immagine tramite R_π della retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sia $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ un punto generico; la retta passante per P e perpendicolare a π è data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e interseca π in un punto Q , corrispondente al valore del parametro $t = (b - a)/2$. Il simmetrico di P rispetto a π corrisponde al valore del parametro $2t = (b - a)$ e risulta

$$R_\pi(P) = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la riflessione R_π è lineare; ed infatti il piano π passa per l'origine. La retta cercata è la retta passante per i punti $R_\pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $R_\pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; un'equazione parametrica è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. (Solo Civile) Sia $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di f .

(b) Per ogni autovalore di f , determinare l'autospazio corrispondente.

Il polinomio caratteristico di F è dato da

$$P_\lambda(f) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4$$

ed ha come radice $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 4. L'autospazio corrispondente V_0 , che è anche il nucleo di f , è dato da

$$V_0 = \ker f = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Sia $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, data da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Sia $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0 \}$.

(a) Calcolare $W = \ker(f) \cap U$.

(b) Esibire un complemento di W in $\ker(f)$.

Il sottospazio $W = U \cap \ker(f)$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ e risulta $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Di conseguenza un complemento di W in $\ker(f)$ è dato da $\ker(f)$ stesso.

5. Sia $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un'applicazione lineare con autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ e autospazi dati rispettivamente da $V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica.

(b) Determinare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine di F .

Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: rispetto a questa base formata da autovettori, l'applicazione F è rappresentata dalla matrice

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo adesso il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{M=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \downarrow C_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} & & \uparrow C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{M}} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$

La matrice cercata è data da

$$M = C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \circ \widetilde{M} \circ C_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \circ \widetilde{M} \circ C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1},$$

dove la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ (quella facile da scrivere) è data

da $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La sua inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rappresenta invece il cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$. In conclusione, la matrice cercata M risulta

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La dimensione del nucleo di F è precisamente la dimensione dell'autospazio V_0 , cioè 1; di conseguenza la dimensione dell'immagine di F è 2.