GEOMETRIA (Ing. Medica e Civile) (Geatti)   APPELLO 3   Roma, 5 settembre 2005, ore 16.00 - 18.00.

COGNOME .... *NOME* .... Medica......... Civile.........

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Disegnare i sottoinsiemi* $S = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 = 0\}$ *e* $T = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 = 1\}$.
   (a) Dare la definizione di sottospazio di uno spazio vettoriale.
   (b) Determinare se S e T sono sottospazi vettorilai di $\mathbf{R}^2$ (giustificare bene le risposte).

L'insieme $S = \{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \in \mathbf{R}\}$ coincide con l'asse x_2, mentre $T = \{\begin{pmatrix} -1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \in \mathbf{R}\} \cup \{\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \in \mathbf{R}\}$ è dato dall'unione delle rette verticali che intersecano l'asse x_1 rispettivamente nei punti $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Vedi dispense.

(b) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$ (è una retta per l'origine):

$$\forall \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} \in S, \forall a, b \in \mathbf{R} \quad a\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ax_2 + by_2 \end{pmatrix} \in S.$$

T non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$: non contiene il vettore nullo, e in generale è facile trovare una coppia di elementi in T la cui somma non appartiene a T. Ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in T$, ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin T$.

2. *Sia dato il sottospazio* $S = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$.
   (a) Determinare una base di S e la dimensione di S.
   (b) Determinare se i vettori $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ *formano una base di S (giustificare bene la risposta).*

(a) Risolvendo l'equazione che definisce S, troviamo

$$S = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}. \qquad (*)$$

Poichè i vettori in (*) sono generatori linearmente indipendenti di S, formano una base di S e $\dim S = 3$.

(b) I tre vettori $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ sono linearmente indipendenti, ma il terzo non appartiene ad S. Dunque non formano una base di S.

3. *Sia $F \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da* $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) *Determinare autovalori e autospazi di* F.
(b) *Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di* F.
(c) *Dire se è diagonalizzabile, motivando la risposta.*

(a) Il polinomio caratteristico di F è dato da $p_\lambda = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$; di conseguenza gli autovalori sono $\lambda = 1, -1$, con molteplicità algebrica rispettivamente uguale a 2 e a 1. L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta $V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. L'autospazio relativo a $\lambda = -1$ si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta $V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(b) Un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F è dato ad esempio da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(c) L'applicazione non è diagonalizzabile poiché non esiste una base di $\mathbf{R}^3$, fatta da autovettori di F. Ogni insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F contiene infatti solo due vettori.

4. *Siano* $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ *e* $G\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *le applicazioni lineari date rispettivamente da*

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) *Scrivere le matrici rappresentative di* G *e di* $G \circ F$.
(b) *Determinare una base per* $\ker G \circ F$.
(c) *Determinare la dimensione dell'immagine di* $G \circ F$.

(a) Le matrici rappresentative di G e di $G \circ F$ sono date rispettivamente da

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{G\circ F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)(c) Poiché la matrice $M_{G\circ F}$ rango 2, la dimensione dell'immagine di $G \circ F$ è due, e il nucleo di $G \circ F$ è il vettore nullo: $\ker G \circ F = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. In particolare, non c'è una base per $\ker G \circ F$.

5. *(***Solo Medica***) Scrivere le formule della rotazione* $R_{\theta,P}\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ *di un angolo* $\theta = -\pi/4$ *intorno al vettore* $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Calcolare* $R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$. *Dire se si tratta di una trasformazione lineare.*

Le formule della rotazione $R_{\theta,P} = T_P \circ R_\theta \circ T_{-P}$ (dove T_P è la traslazione di passo P ed R_θ è la rotazione intorno all'origine di una angolo θ) sono date da

$$R_{\theta,P}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} T_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2 - \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2 - \sqrt{2}/2 + 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 + 1 \end{pmatrix}$, $R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$.

(c) $R_{\theta,P}$ non è lineare: ad esempio, non manda l'origine in sè.

5. (**Solo Civile**) *Sia* $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ *l'applicazione lineare data da* $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. *Determinare la matrice rappresentativa della composizione* $F^{101} = F \circ F \circ \ldots \circ F$.

La matrice rappresentativa della composizione $F^{101} = F \circ F \circ \ldots \circ F$ è data da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{101}$. In questo caso, si verifica facilmente che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, per k pari, e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, per k dispari. Dunque la matrice cercata è $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.