GEOMETRIA (Ingegneria Medica e Civile) (Geatti) APPELLO 2 Roma, 11 maggio 2005, ore 11–13.

COGNOME .... *NOME* .... Medica......... Civile.........

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia dato il sottospazio $U = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}\}$ in $\mathbf{R}^4$. **(a)** Determinare una base di U e la dimensione di U. **(b)** Completare la base trovata ad una base di $\mathbf{R}^4$. **(c)** Determinare se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ appartiene ad U.

(i) Per determinare una base di U usiamo l'eliminazione di Gauss per righe sulla matrice le cui righesono proprio i generatori di U:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-4\\1&0&0&-2\\0&0&1&2\\1&0&3&1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&1&-4\\0&0&-1&2\\0&0&1&2\\0&0&2&5\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&1&-4\\0&0&-1&2\\0&0&0&4\\0&0&0&9\end{pmatrix}.$$

Otteniamo che una base di U è data ad esempio dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}$$

e che U ha dimensione 3. Osserviamo che U è il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito dall'equazione $x_2 = 0$, quindi tre qualunue vettori linearmente indipendenti, con la seconda coordinata nulla, sono una base di U.

(ii) Un possibile completamento della base di U trovata al punto (i) è dato dal vettore $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. Infatti la quaterna di vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

è indipendente ed è una base di $\mathbf{R}^4$.

(iii) Il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ non appartiene ad U, avendo la seconda coordinata non nulla. Alternativamente si può verificare che il sistema lineare

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

non ha soluzioni.

2. Sia $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e sia $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2 = x_3 \}$.
   (i) Determinare $\ker F$, esibendone una base.
   (ii) Determinare (se possibile) una base di $\ker F \cap U$ e determinare la dimensione di $F(U)$.
   (iii) Esibire un sottospazio $W \subset \mathbf{R}^3$, tale che $\dim W = \dim F(W) = 1$.

(i) Il nucleo di F è dato dalle soluzioni in $\mathbf{R}^3$ del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$. Dunque

$$\ker F = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

(ii) Il sottospazio $U \cap \ker F$ di $\mathbf{R}^3$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Dunque

$$U \cap \ker F = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \},$$

ossia è il sottospazio banale di $\mathbf{R}^3$. In questo caso non c'e' base da esibire. Poiché $U = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, si ha che

$$\dim U = 2, \qquad \dim F(U) = \dim U - \dim(U \cap \ker F) = 2 - 0 = 2.$$

Si può anche verificare che $F(U) = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$. (iii) Il sottospazio W deve essere un sottospazio di dimensione 1 in $\mathbf{R}^3$, che interseca $\ker F$ nel sottospazio banale: ad esempio $W = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$. Infatti $\dim W = 1$ e si verifica facilmente che $F(W) = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, con $\dim F(W) = 1$.

ATTENZIONE: È importante distinguere sottospazi, vettori generatori e matrici. NON usare scritture del tipo

$$U = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \quad \text{oppure} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{per dire} \quad U = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

oppure

$$F(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

per dire

$$F(U) = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \},$$

dove

$$F(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad F(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

3. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ un'applicazione lineare. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ autovettori di f di autovalori $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$ rispettivamente.
   (i) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
   (ii) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

(i) Poiché la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ fatta di autovettori di f, di autovalori $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$ rispettivamente, la matrice rappresentativa di f rispetto a $\mathcal{B}$ (in dominio e codominio) è diagonale con gli autovalori sulla diagonale principale. Precisamente

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

(ii) Per determinare la matrice rappresentativa A di f rispetto alla base canonica (in dominio e codominio), consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{A=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C}\\ \big\downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} & & \big\uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B}\end{array}$$

dove i cambiamenti di base sono dati da

$$C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è data da

$$A = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \circ \tilde{A} \circ C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix}2&1&-3\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

4. (**Solo Medica**) Sia π il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x_1 - x_2 = 0$. **(a)** Determinare le formule della riflessione S_π rispetto a π. **(b)** Calcolare $S_\pi(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$ ed $S_\pi(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$. **(c)** Dire se l'applicazione è diagonalizzabile, spiegando la risposta.

(a) Per determinare le formule della riflessione S_π rispetto a π, partiamo da un punto generico $P = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$. Scriviamo la retta per P e perpendicolare a π

$$r; \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \perp \pi.$$

La retta r interseca π in un punto Q, in corrispondenza del valore del parametro $t_0 = \frac{(c-a)}{2}$ (per determinare t_0 basta sostituire le coordinate del generico punto di r nell'equazione di π). Il simmetrico di P rispetto a π si trova in corrispondenza dl valore del parametro $2t_0 = (c-a)$, ossia

$$S_\pi(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + (c-a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c-a \\ 0 \\ a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

Le formule della riflessione S_π rispetto a π sono pertanto

$$S_\pi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Si tratta di una trasformazione lineare perché il piano di riflessione passa per l'origine.

(ii) $S_\pi i(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad S_\pi i(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Osserviamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \pi$ e dunque resta fisso.

(iii) L'applicazione S_π risulta diagonalizzabile: il piano di riflessione π è l'autospazio di 1, mentre la retta per l'origine $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, perpendicolare a π, è l'autospazio di -1.

4. (**Solo Civile**) Sia dato il sottospazio $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$ in $\mathbf{R}^3$. **(a)** Determinare una base di U. **(b)** Determinare se i vettori $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ sono una base di U. **(c)** Determinare (se possibile) una base di $U \cap V$, dove $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = 0\}$ **(c)** Determinare la dimensione di $U + V$.

(a) Risolvendo l'equazione che definisce U, si trova $U = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. I due vettori $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ sono generatori linearmente indipendenti e dunque sono una base di U. In particolare U ha dimensione 2.

(b) I vettori $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ non sono una base di U: sono 2, sono linearmente indipendenti, ma il secondo non appartiene a U (non ne soddisfa l'equazione).

(c) $U \cap V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. In particolare $\dim(U \cap V) = 1$ e $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ è una base di $U \cap V$.

(d) Dalle formule di Grassmann $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3$.