GEOMETRIA (Ingegneria Medica e Civile) (Geatti) APPELLO 1 Roma, 3 maggio 2005, 13,30–15,30.

COGNOME .... *NOME* .... Medica......... Civile.........

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Siano dati i sottospazi $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \}$ e $V = span\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ di $\mathbf{R}^4$. **(a)** Determinare una base di U. **(b)** Determinare una base di V. **(c)** Determinare una base di $U+V$. **(d)** Determinare la dimensione di $U \cap V$.

(a) Risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce U troviamo

$$U = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

I vettori $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ sono generatori linearmente indipendenti di U, e dunque sono una base di U.

(b) Analogamente si ha che i vettori $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ sono generatori linearmente indipendenti di V, e dunque sono una base di V.

(c) Si verifica facilmente che i vettori

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

sono linearmente indipendenti e dunque sono una base di $U+V$.

(d) dalle formule di Grassmann si trova

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim U + V = 2 + 2 - 4 = 0.$$

2. Sia $F \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da $F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare il nucleo di F, esibendone possibilmente una base.
   (b) Determinare una base per l'immagine $F(\mathbf{R}^3)$.
   (c) Dire se F è iniettiva e se F è suriettiva, motivando le risposte.

(a) Il nucleo di F è il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}, \quad \text{ossia} \quad \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

In questo caso, trattandosi del sottospazio banale, non c'e base da esibire.

(b) L'immagine $F(\mathbf{R}^3)$ è generata ad esempio dai vettori colonna della matrice rappresentativa:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

È facile verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti, e dunque costituiscono una base dell'immagine $F(\mathbf{R}^3)$.

(c) Poiché il nucleo è ridotto al solo elemento $\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$, l'applicazione è iniettiva; l'applicazione non è, né potrebbe essere in alcun caso, suriettiva perché $\dim F(\mathbf{R}^3) = 3 < \dim \mathbf{R}^4$ e dunque $F(\mathbf{R}^3) \neq \mathbf{R}^4$.

3. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.
   (a) Determinare autovalori e autospazi di F.
   (b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F.
   (c) Dire se è diagonalizzabile, motivando la risposta.

(a) Il polinomio caratteristico della matrice $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ è dato da $p_\lambda(A) = \lambda^3$, da cui segue che F ha come unico autovalore $\lambda = 0$, con molteplicità algebrica 3. L'autospazio corrispondente V_0 è dato da

$$V_0 = \ker F = \{X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid AX = O\} = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid \begin{cases}x_2 = 0\\x_3 = 0\end{cases}\} = span\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}.$$

(b) Poiché $\dim V_0 = 1$, un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F contiene al più un autovettore non nullo di F. Ad esempio $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$.

(b) Poiché non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ fatta di autovettori di F, l'applicazione non è diagonalizzabile.

4. Siano $F\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ e $G\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ le applicazioni lineari date rispettivamente da

$$F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, \qquad G\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere le formule generali per $G \circ F$.
   (b) Determinare una base per $U \cap \ker(G \circ F)$, dove $U = \{X \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 = 0\}$.
   (c) Determinare la dimensione di $G \circ F(U)$, ossia dell'immagine di U tramite $G \circ F$.

(a) Le formule generali per $G \circ F$ sono date da

$$G \circ F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

(b) Il sottospazio $U \cap \ker(G \circ F)$ di $\mathbf{R}^4$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \, , \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \quad span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

(c) Poiché la dimensione di U è uguale a 3 e la dimensione di $U \cap \ker(G \circ F)$ è uguale a 1, segue che la dimensione di $G \circ F(U)$ è uguale a $3 - 1 = 2$. Chi non ci crede, può verificare che una base di U è data da $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, mentre una base di $G \circ F(U)$ è data da $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

5. (**Solo Medica**) Scrivere le formule della rotazione $R_{\theta,\mathbf{v}} \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ di un angolo $\theta = -\pi/2$ intorno al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dire se l'applicazione è o meno diagonalizzabile, motivando la risposta.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{A=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} & & \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$

dove $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice di una rotazione di un angolo $\theta = -\pi/2$ in senso antiorario intorno al versore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$, orientata positivamente, il cui terzo versore ha direzione e verso di $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se scegliamo ad esempio $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$, la matrice cercata risulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & -1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione non è diagonalizzabile, in quanto l'unica retta mandata in se stessa è l'asse di rotazione.

5. (**Solo Civile**) Sia $F \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da $F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\}$ in dominio e codominio.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2, \mathcal{C} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^2, \mathcal{C} \\ \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & & \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ \mathbf{R}^2, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}=?} & \mathbf{R}^2, \mathcal{B} \end{array}$$

La matrice cercata $\tilde{A}$ è data da

$$\tilde{A} = C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \circ A \circ C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$