Consegnarmi lo svolgimento completo di questo esercizio:

10. *Siano dati i due sottoinsiemi di* $\mathbf{R}^3$

$$U = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_3 = 0\}.$$

(i) Verificare che si tratta di sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$*;*
(ii) deteminare le rispettive dimensioni ed esibirne una base;
(iii) dare un'interpretazione geometrica di U *e* V *e farne un disegno approssimativo;*
(iv) determinare se $U = V$*, motivando bene la risposta.*

Sol. (i) Per definizione

$$U = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \{a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a \\ -(a+b) \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}\} \ \subset \ \mathbf{R}^3.$$

Facciamo vedere che U è chiuso rispetto alla somma fra vettori e alla moltiplicazione per gli scalari, ossia $\forall u_1, u_2 \in U$, vale $u_1 + u_2 \in U$ e che $\forall u \in U$ e $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ vale $\lambda u \in U$.

Siano $u_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $u_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ elementi qualunque di U, e sia $\lambda \in \mathbf{R}$: allora

$$u_1 + u_2 = (a + c) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (b + d) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U,$$

$$\lambda u_1 = \lambda a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U.$$

Dobbiamo verificare lo stesso per V

$$V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_3 = 0\} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Siano $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$, con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ elementi qualunque di V, e sia $\lambda \in \mathbf{R}$: allora

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} \in V,$$

$$\lambda v_1 = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix} \in V.$$

(ii) I generatori di U sono linearmente indipendenti (si puo' vedere col calcolo diretto o osservando che non sono collineari), dunque formano una base di U e $\dim U = 2$;

Risolvendo l'equazione che lo definisce, si trova $V = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. I generatori di V trovati sono linearmente indipendenti (si puo' vedere col calcolo diretto o osservando che non sono collineari), dunque formano una base di V e $\dim V = 2$.

(iii) I sottospazi U e V sono due piani per l'origine in $\mathbf{R}^3$.

(iv) Abbiamo che $U \neq V$: si vede subito che $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ non soddisfa l'equazione che definisce V. Pertanto $U \not\subset V$ e in particolare $U \neq V$.