GEOMETRIA (Ing. Civile - Geatti) APPELLO 5 Roma, 22 settembre 2011, ore 15 – 17,30.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *(a) Determinare tre piani in* $\mathbf{R}^3$ *che si incontrano in un punto.*
   (b) Determinare tre piani in $\mathbf{R}^3$ *che si incontrano in una retta.*
   (c) Determinare tre piani α, β, γ *in* $\mathbf{R}^3$ *tali che* $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, *ma* $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$.

Giustificare le risposte con i necessari calcoli.

(a) Consideriamo ad esempio i tre piani coordinati in $\mathbf{R}^3$

$$\pi_1: \quad x_1 = 0, \qquad \pi_2: \quad x_2 = 0, \qquad \pi_3: \quad x_3 = 0$$

si incontrano esattamente nell'origine.

(b) I tre piani

$$\pi_1: \quad x_1 = 0, \qquad \pi_2: \quad x_2 = 0, \qquad \pi_3: \quad x_1 + x_2 = 0$$

si incontrano esattamente nell'asse x_3, ossia nella retta verticale di equazioni $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$.

(c) I tre piani

$$\pi_1: \quad x_1 = 0, \qquad \pi_2: \quad x_2 = 0, \qquad \pi_3: \quad x_1 = 1$$

non hanno punti in comune poiché il primo e il terzo sono paralleli. D'altra parte i primi due si incontrano nell'asse x_3.

2. *Siano* $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *e* $G\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *le applicazioni lineari date rispettivamente da*

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad G(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere le formule generali di F *e di* G.
   (b) Scrivere le formule generali di $F \circ G$ *e di* $G \circ F$.
   (c) Determinare nucleo e immagine di $F \circ G$ *esibendo una base di ognuno dei due.*

(a)

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \qquad G(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$F \circ G\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad F \circ G(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 0 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

$$G \circ F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad G \circ F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) L'immagine di $F \circ G$ è data da span$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$ ed ha dimensione uno (la matrice rappresentativa ha rango uno). Il nucleo di $F \circ G$ ha dimensione due ed è dato dalle soluzione dell'equazione lineare omogenea $x_1 + x_3 = 0$. Una sua base è data ad esempio dai vettori $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

3. *Sia data l'applicazione lineare* $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\quad X \mapsto MX$, *con* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *ed* $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori di* L.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L *in tale base.*
   (c) Dare un'interpretazione geometrica di L.

(a) Radici del polinomio caratteristico: $\lambda = 1$ con molteplicità uno e autospazio $V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\}$;

$\lambda = 2$ con molteplicita' due e autospazio $V_{-1} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Innanzitutto, la matrice M è una matrice ortogonale con tutti autovalori reali, per cui una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di M esiste. Ed infatti è data dai vettori $\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(b) Rispetto a questa base (in dominio e codominio) la matrice rappresentativa di L è data da $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, cioè una matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale principale.

(c) Geometricamente è una rotazione di 180 gradi rispetto all'asse delle x_1 positive, ossia è una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \pi.$$

4. *Sia* $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2 = 0\}$ *e sia data* $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare dell'esercizio 3.*

   (a) Determinare il complemento ortogonale $V^\perp$ *di* V *in* $\mathbf{R}^3$, *esibendone una base.*
   (b) Verificare che per ogni $X \in \mathbf{R}^3$ *vale* $\|L(X)\| = \|X\|$.
   (c) Verificare che $L(V) = V$ *e* $L(V^\perp) = V^\perp$.

(a) $V = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ di dimensione due, per cui $V^\perp = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}\} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ed ha dimensione uno.

(b) Abbiamo $L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Da cui è chiaro che $\|L(X)\| = \sqrt{x_3^2 + x_2^2 + x_1^2} = \|X\|$.

(c) Poiché le immagini dei vettori di una base di V appartengono a V (infatti $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ ed L è iniettiva, abbiamo che $L(V) = V$. Similmente da $L(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ segue che $L(V^\perp) = V^\perp$.
Osserviamo che L è un'isometria di $\mathbf{R}^3$, per cui se $L(V) = V$, allora anche $L(V^\perp) = V^\perp$.

5. *Sia data la conica di equazione* $\mathcal{C} \;\; x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 0$ *in* $\mathbf{R}^2$.

   (a) Determinare tre punti di $\mathcal{C}$.

(a) Determinare una forma canonica metrica di $\mathcal{C}$*.*
(a) Determinare una isometria di $\mathbf{R}^2$ *che porti* $\mathcal{C}$ *in tale forma.*