GEOMETRIA (Ing. Civile - Geatti) APPELLO 4 Roma, 1 settembre 2011, ore 10,30-13.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Sia data la retta* $r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, *nello spazio* $\mathbf{R}^3$.
   - *(a) Richiamare le definizioni di coppia di rette parallele e di coppia di rette sghembe in* $\mathbf{R}^3$.
   - *(b) Determinare una retta* s *parallela ad* r *e passante per l'origine. Quante ce ne sono?*
   - *(c) Determinare una retta* σ *passante per l'origine e tale che* r *e* σ *formino una coppia di rette sghembe. Quante ce ne sono?*

   Giustificare bene le risposte in base alle definizioni date al punto (a).

(a) Due rette in $\mathbf{R}^3$ sono parallele se hanno vettori della direzione proporzionali. Se hanno intersezione non vuota, allora necessariamente coincidono. Due rette parallele sono contenute in uno stesso piano. Tale piano è unico se le rette non si incontrano (altrimenti ce ne sono infiniti).

Due rette in $\mathbf{R}^3$ sono sghembe se non si incontrano e non sono parallele. Due rette sghembe sono contenute in piani paralleli distinti.

(b) C'è un'unica retta parallela ad r e passante per l'origine: in forma parametrica è data da

$$s: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbf{R}.$$

(c) Ci sono infinite rette σ, passanti per l'origine, tali che r e σ formano una coppia di rette sghembe. Per costruirne una, si può fare così :
sia π un piano che contiene r e non contiene l'origine; sia π' un piano parallelo a π e passante per l'origine. Una qualsiasi retta σ contenuta in π' e passante per l'origine è una retta che soddisfa le condizioni richieste. Ad esempio

$$\pi \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t, \tau \in \mathbf{R}$$

è un piano che contiene r e non contiene l'origine (verificare che non esistono t, τ per cui $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.....) e

$$\sigma: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbf{R}.$$

2. *Siano* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *vettori di* $\mathbf{R}^3$ *munito del prodotto scalare canonico.*
   - *(a) Completare* $\mathbf{v}$ *ad una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$.
   - *(b) Determinare le coordinate di* $\mathbf{w}$ *nella base determinata al punto precedente.*
   - *(c) Determinare la proiezione ortogonale di* $\mathbf{w}$ *sul sottospazio* $\mathbf{v}^\perp$, *il complemento ortogonale di* $\mathbf{v}$ *in* $\mathbf{R}^3$.

(a) Dobbiamo determinare altri due vettori $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ in modo che la terna $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ sia una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$: ad esempio possiamo scegliere

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che i tre vettori $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ sono tutti di norma uno e sono a due a due ortogonali fra loro.

(b) Trattandosi di una base ortonormale, le coordinate di $\mathbf{w}$ in $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ sono date rispettivamente da

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 1/\sqrt{3}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{p} = 2/\sqrt{6}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Verificare che funzionano:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} = etc....$$

(c) Per costruzione, il complemento ortogonale di $\mathbf{v}$ è dato da $\mathbf{v}^\perp = \mathrm{span}\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$. Poiché $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ è a sua volta una base ortonormale di $\mathbf{v}^\perp$, la proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ su $\mathbf{v}^\perp$ è data da

$$\Pi_{\mathbf{v}^\perp}(\mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} = 2/\sqrt{6} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = etc.....$$

3. *Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare con matrice rappresentativa $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, nella base canonica in dominio e codominio.*
   (a) Determinare la matrice rappresentativa di F nella base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ in dominio e codominio.
   (b) Determinare gli autovalori di F, un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti e dire se F è diagonalizzabile, spiegando bene la risposta.

(a) La matrice cercata può essere determinata in base al seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2, \mathcal{C} & \xrightarrow{M} & \mathbf{R}^2, \mathcal{C} \\ \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & & \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ \mathbf{R}^2, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{M}=?} & \mathbf{R}^2, \mathcal{B} \end{array}$$

dove $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica, e $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$. Dunque

$$\widetilde{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gli autovaori della matrice M, che è triangolare superiore, sono gli elementi sulla diagonale principale. Poiché gli autovalori sono reali e distinti la matrice è diagonalizzabile: autovettori di autovalori (reali) distinti sono linearmente indipendenti. Ne segue che esistono due autovettori di M linearmente indipendenti ed in particolare esiste una base di $\mathbf{R}^2$ fatta di autovettori di M. Questa è la condizione necessaria e sufficiente alla diagonalizzabilità di M (vedi teorema....).

4. *Sia* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e sia* $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare data da* $X \mapsto X \times \mathbf{v}$, *dove* $\times$ *indica il prodotto vettoriale in* $\mathbf{R}^3$.
(a) Scrivere la formula generale di F *e determinarne la matrice rappresentativa.*
(b) Determinare nucleo e immagine di F, *esibendone una base. Darne un'interpretazione geometrica.*

(a) La formula generale di F è data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

che in forma matriciale diventa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Il prodotto vettoriale $X \times \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia ad X che a $\mathbf{v}$ ed è nullo se e solo se $X = \lambda \mathbf{v}$, per uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$.

Dunque si ha che $\ker F = \mathrm{span}\{\mathbf{v}\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $F(\mathbf{R}^3) = \mathbf{v}^\perp = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

5. *Sia data la forma quadratica* $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3$.
(a) Determinare una forma canonica metrica di Q.
(b) Determinare un'isometria $X = MY$ *che porti* Q *nella forma canonica metrica trovata al punto (a).*
(c) Sia $Q(y_1, y_1, y_3)$ *una forma canonica metrica di* Q. *Fare un disegno approssimativo della superficie* $Q(y_1, y_1, y_3) = 1$.

(a) Scriviamo la forma quadratica come $Q(x_1, x_2, x_3) = {}^tXAX$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Poiché la matrice A è reale simmetrica, esiste una matrice ortogonale C tale che $C^{-1}AC = D$, dove D è una matrice diagonale con gli autovalori di A (che sono reali) sulla diagonale principale. Gli autovalori di A sono $\lambda = 3$, $\lambda = -1$ (doppio), con autospazi

$$V_3 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad V_{-1} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

rispettivamente. Una forma canonica metrica di Q è data da $Q(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.
(b) Un'isometria che porta Q in tale forma è data da $X = CY$, cioè

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1\sqrt{2} & -1\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

dove la matrice ortogonale C ha per colonne una base ortonormale di autovettori di A (l'ordine degli autovettori rispecchia quello degli autovalori come coefficienti di $Q(y_1, y_2, y_3)$).
(c) La superficie $Q(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$ è un iperboloide a due falde in $\mathbf{R}^3$. (vedi filmetti sulla pagina web del corso).