COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

---

1. *Siano date le rette* $r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, *ed* $s: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ *in* $\mathbf{R}^3$.

   (a) Determinare l'intersezione $r \cap s$.

   (b) Esiste un piano che contiene sia r *che* s*? Se si, determinarlo. Altrimenti determinare equazioni cartesiane di due piani paralleli, uno che contiene* r *e l'altro che contiene* s.

   (c) Esiste una retta che incontra sia r *che* s *ed è perpendicolare ad entrambe? Illustrare la situazione con un disegno e spiegare bene la risposta.*

(a) Sostituendo le coordinate $\begin{pmatrix} 1+t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, del punto generico di r nelle equazioni di s, vediamo che $r \cap s = \{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \}$, punto che corrisponde a $t = -1/2$.

(b) Entrambe le rette sono contenute nel piano $x_2 = 0$ e sono perpendicolari fra loro.

(c) La retta in questione è la retta $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, ossia la retta passante per il punto $r \cap s$ ed ortogonale al piano $x_2 = 0$ che contiene r ed s. In particolare incontra entrambe ortogonalmente.

2. (a) *Richiamare la definizione di matrice ortogonale reale e di matrice unitaria complessa.*

   (b) Determinare una matrice ortogonale 3×3*, la cui prima colonna sia data da* $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare una matrice unitaria 2×2*, la cui prima colonna sia data da* $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(a) Vedi testo o dispense.

(b) Si tratta di determinare un completamento (NON UNICO) del vettore $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$, rispetto al prodotto scalare canonico: ad esempio

$$\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

La matrice ortogonale corrisponedente è

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tMM = I_3.$$

(c) Si tratta di determinare un completamento (NON UNICO) del vettore $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ad una base ortonormale di $\mathbf{C}^2$, rispetto al prodotto hermitiano canonico: ad esempio

$$\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \}.$$

La matrice hermitiana corrisponedente è

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i1/\sqrt{2} \\ -i1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad {}^t M \bar{M} = I_2.$$

3. *Sia* $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *un'applicazione lineare e siano* $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
   (a) Verificare che i vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *formano una base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^3$.
   (b) Determinare le coordinate del vettore $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3$ *nella base* $\mathcal{B}$ *e nella base canonica.*
   (c) Determinare la matrice rappresentativa di L *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *in dominio e codominio, sapendo che* $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $L(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

(a) Basta far vedere che $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$. Oppure usare l'eliminazione di Gauss su $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(b) Le coordinate di $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3$ nella base $\mathcal{B}$ sono: $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Le coordinate di $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3$ nella base canonica sono: $\mathbf{w} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La matrice rappresentativa etc....(vedi dispense). La matrice cercata è data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Siano date le matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare quali fra esse sono diagonalizzabili, giustificando bene la risposta.
   (b) Per le matrici A_i che sono diagonalizzabili, determinare una matrice M tale che $M^{-1}A_iM$ sia diagonale.

(a) Tutte e tre le matrici hanno evidentemente autovalori reali. Quindi restano da controllare i relativi autospazi.

$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$:

autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$; autospazio $V_{10} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, di dimensione 1. Poiché non esiste una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A_1, si ha che A_1 non è diagonalizzabile.

$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$:

autovalori $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -5$ reali e distinti. Poiché necessariamente $\dim V_5 = \dim V_{-5} = 1$ e $V_5 \cap V_{-5} = O$, esiste una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A_2, data precisamente da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}\}$. Ne segue che A_2 è diagonalizzabile.

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$; autospazi $V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$, di dimensione 2; $V_3 = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$, di dimensione 1. Poiché esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A_3, precisamente $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$, si ha che A_3 è diagonalizzabile.

(b) La matrice cercata è la matrice $M = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ di autovettori di A_i alla base canonica, secondo il diagramma qui sotto:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n, \mathcal{C} \arrow[r, "A_i"] & \mathbf{R}^n, \mathcal{C} \arrow[d, "C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = C^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}"] \\
\mathbf{R}^n, \mathcal{B} \arrow[u, "C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}"] \arrow[r, "D_i"] & \mathbf{R}^n, \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Per A_2, la matrice è $M = \begin{pmatrix}1 & 9\\0 & -10\end{pmatrix}$;

per A_3, la matrice è $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5. *Sia data la conica C in $\mathbf{R}^2$ di equazione $x^2 - 2xy + y^2 = 1$.*
   (a) Determinare una forma canonica metrica di C.
   (b) Determinare un'isometria di $\mathbf{R}^2$ che la riduca a tale forma.
   (c) Fare un disegno approssimativo di C (in forma canonica metrica) e dire di che tipo di conica si tratta.

(a) La forma quadratica associata è $x^2 - 2xy + y^2 = {}^tX \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} X$, con $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$, con autospazi dati rispettivamente da $V_2 = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ e $V_0 = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Una forma canonica metrica di C è data da $2\bar{x}^2 = 1$.

(b) Un'isometria che la riduce a tale forma è data da $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\bar{X}$, con $\bar{X} = \begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$. Infatti,

$${}^tX \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} X = {}^t\bar{X}\ {}^t\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\bar{X} =$$

$$= {}^t\bar{X}\ \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\bar{X} = {}^t\bar{X}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\bar{X} = 2\bar{x}^2 = 1,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$ è il cambiamento di base dalla base ortonormale di autovettori di A data da $\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\}$ alla base canonica (in particolare è una matrice ortogonale diagonalizzante per A).

(c) La conica C consiste in due rette parallele. In forma canonica metrica, tali rette sono le rette verticali $\bar{x} = 1/2$ e $\bar{x} = -1/2$.