COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Sia dato il piano* $\pi = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0\}$ *e sia* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - *(a) Determinare la proiezione ortogonale di* P *su* π.
   - *(b) Determinare una retta ortogonale a* π *e passante per* P. *Quante ce ne sono?*
   - *(c) Determinare una retta parallela a* π *e passante per* P. *Quante ce ne sono?*

(a) Abbiamo $\pi = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \}$, dove $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \}$ è una base ortonormale di π. La proiezione ortogonale di P su π è data quindi da

$$\Pi_\pi(P) = \left(P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) C'e' un'unica retta ortogonale a π e passante per P: in forma parametrica è data da

$$r: \quad X = P + tN, \quad t \in \mathbf{R},\ N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove N è un vettore normale al piano π.

(c) Ci sono invece infinite rette parallele a π e passanti per P: in forma parametrica si ottengono come

$$s: \quad X = P + sB, \quad s \in \mathbf{R},$$

dove B è un qualunque vettore parallelo al piano π. Ad esempio $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oppure $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. *Siano dati* $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\}$, $W = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{R}^4$.
   - *(a) Determinare se* $\mathbf{R}^4$ *è somma diretta di* V *e* W, *giustificando la risposta.*
   - *(b) Determinare una base ortonormale di* W.
   - *(c) Determinare se* $\mathbf{v}$ *appartiene a* V, W, $V \cap W$, $V + W$. *Giustificare le risposte.*

(a) Abbiamo $V = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, da cui $\dim V = 2$, e $W = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, da cui $\dim W = 2$.

Per definizione $\mathbf{R}^4$ è somma diretta di V e W se e solo se

$$\mathbf{R}^4 = V + W, \quad \text{e} \quad V \cap W = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Dall'eliminazione di Gauss, si trova che i vettori $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti. Precisamente il sottospazio $V+W$ da essi generato ha dimensione tre (e per Grassmann $V\cap W$ ha dimensione uno). Dunque $\mathbf{R}^4$ non è somma diretta di V e W.

(b) Una base ortogonale di W è data dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Una base ortonormale di W è data dai vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}.$$

(c) È immediato vedere che $\mathbf{v}$ non soddisfa le equazioni di V, per cui $\mathbf{v} \notin V$ e di conseguenza $\mathbf{v} \notin V \cap W$. Si vede facilmente anche che $\mathbf{v} \notin W$: infatti

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \lambda,\mu\in\mathbf{R}$$

non ha soluzioni. Dai calcoli al punto (a) si ha

$$V+W = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

Anche in questo caso

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \lambda,\mu,\gamma\in\mathbf{R}$$

non ha soluzioni, per cui $\mathbf{v} \notin V+W$.

3. *Sia* $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione data da* $X \mapsto MX$, *dove* $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ *ed* $M = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\1&1/2&0\end{pmatrix}$.
   (a) *Determinare nucleo* $\ker L$ *e immagine* $L(\mathbf{R}^3)$ *di* L, *esibendone una base.*
   (b) *Calcolare l'immagine tramite* L *del piano* $\pi = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0\}$, *esibendone una base. Che dimensione ha l'intersezione* $\ker L \cap \pi$? *Spiegare la risposta.*
   (c) *Determinare un sottospazio* U *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $\dim F(U) = 1$. *Spiegare la risposta.*

(a) Risolvendo il sistema lineare $MX = O$, si trova $\ker(L) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1/2\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ e $\dim\ker L = 1$. Poiché le colonne della matrice rappresentativa sono le immagini dei vettori (che formano una base di $\mathbf{R}^3$) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

tramite L, abbiamo che

$$L(\mathbf{R}^3) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\} = span\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}.$$

I vettori $\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$ formano una base di $L(\mathbf{R}^3)$. In particolare $\dim L(\mathbf{R}^3) = 2$.

(b) Poiché $\pi = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$, si ha $L(\pi) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1/2\end{pmatrix}\}$ e $\dim L(\pi) = 2 = \dim \pi$. Dalla formula

$$\dim \pi = \dim L(\pi) + \dim \pi \cap \ker L$$

segue che $\dim \pi \cap \ker L = 0$.

(c) Un sottospazio U di $\mathbf{R}^3$ tale che $\dim F(U) = 1$ può essere un sottospazio di dimensione uno con $U \cap \ker L = \{O\}$, oppure un sottospazio di dimensione due con $\dim U \cap \ker L = 1$. Ad esempio $U = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$, oppure $U = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1\\1\end{pmatrix}\}$.

4. *Sia data la quadrica* $\mathcal{Q} := \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + 3x_2^2 = 1\right\}$ *in* $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare quattro punti distinti di $\mathcal{Q}$, non complanari.
   (b) Verificare che se $P = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$ *appartiene a $\mathcal{Q}$, allora* $P + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ *appartiene a $\mathcal{Q}$, per ogni $t \in \mathbf{R}$.*
   (c) Fare un disegno di $\mathcal{Q}$ e dire di che cosa si tratta.

(a) Ad esempio: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1/3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1/3\\4\end{pmatrix}$.

(b) Si ha che $P \in \mathcal{Q}$ se e solo se $p_1^2 + 3p_2^2 = 1$. Per ogni $t \in \mathbf{R}$, i punti $P + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3+t\end{pmatrix}$ soddisfano la stessa relazione e dunque appartengono a $\mathcal{Q}$.

(c) Al variare di $t \in \mathbf{R}$, i punti $P + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3+t\end{pmatrix}$ formano la retta verticale passante per P. Dunque $\mathcal{Q}$ è un cilindro ellittico che interseca il piano orizzontale $x_3 = 0$ nell'ellisse di equazione $x_1^2 + 3x_2^2 = 1$.

5. (a) *Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $L\colon V \to V$ un'applicazione lineare. Richiamare la definizione di autovettore di L di autovalore $\lambda \in \mathbf{R}$.*
   (b) Data l'applicazione lineare

$$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \qquad \theta \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

determinare se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *è autovettore di* F.

(c) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F. *Dire se* F *è diagonalizzabile, spiegando la risposta.*

(a) Vedi testi...

(b) Calcolando

$$M \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + 2\sin\theta \\ \sin\theta + 2\cos\theta \\ -1 \end{pmatrix},$$

si vede che non esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Dunque $\mathbf{v}$ non è un autovettore di F.

(c) Il polinomio caratteristico di F è dato da

$$P_\lambda = \det(M - \lambda I_3) = ((\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta)(1 - \lambda) = (\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1)(1 - \lambda)$$

ed ha due radici complesse coniugate e una radice reale $\lambda = 1$. L'autospazio di autovalore $\lambda = 1$ è dato da $V_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ed ha dimensione 1. Un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F è formato dal solo vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1$. L'applicazione non è diagonalizzabile perchè non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ fatta di autovettori di F.

Geometricamente, F è la rotazione di un angolo θ intorno al vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'asse x_3 è asse di rotazione, e dunque fissato da F. Nessuna retta del piano $x_3 = 0$ è mandata in se.