COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Sia data la retta* $r: \begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2-2x_3=0 \end{cases}$ *in* $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare un punto $P \in r$ *ed equazioni cartesiane di due piani distinti che contengono* r.
   (b) Determinare un'equazione cartesiana del piano π *passante per l'origine ed ortogonale ad* r.
   (c) Determinare un'equazione parametrica della retta s *passante per l'origine e parallela ad* r.

(a) La retta $r: \begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2-2x_3=0 \end{cases}$ è espressa come intersezione di due piani (distinti). Due piani distinti che contengono r sono appunto $x_1+x_2+x_3=1$ e $x_2-2x_3=0$. La retta r in forma parametrica è data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Ad ogni valore di t corrisponde un punto su r: ad esempio a $t=0$ corrisponde il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Il piano π è un piano per l'origine il cui vettore normale è parallelo al vettore della direzione di r dato da $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque ha equazione $-3x_1+2x_2+x_3=0$.

(c) La retta s ha vettore della direzione collineare al vettore della direzione di r. Una sua equazione parametrica è data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.

2. *Siano dati* $U = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ *e* $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}\}$ *e* $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{R}^4$.
   (a) Determinare se $\mathbf{R}^4$ *è somma diretta di* U *e* V*, cioè* $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$*. Giustificare bene la risposta.*
   (b) Determinare se $P \in U$*.*
   (c) Calcolare la proiezione ortogonale di P *su* U*.*

(a) I generatori di U sono linearmente indipendenti (non sono collineari), dunque $\dim U = 2$; risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce V, si trova $V = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Da cui segue che $\dim V = 2$. Il sottospazio $U+V$ è generato dai vettori $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Mediante l'eliminazione di Gauss si verifica che tali vettori sono linearmente indipendenti, per cui $\mathbf{R}^4 = U+V$. Dalla formule di Grassmann si ha che $\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-4 = 0$, da cui segue che $U \cap V = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ed $R^4 = U \oplus V$.

(b) Tutti gli elementi di U, che sono della forma $a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, con $a,b\in\mathbf{R}$, hanno la terza coordinata nulla. Dunque è chiaro che $P\notin U$.

(c) Se $\{u_1,u_2\}$ è una BASE ORTOGONALE di U, allora la proiezione ortogonale di P su U è data dalla formula

$$\pi_U(P)=\frac{P\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1+\frac{P\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}u_2.$$

Una base ortogonale di U, ottenuta col procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, è data dai vettori

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}\}.$$

La proiezione ortogonale di P su U risulta $\pi_U(P)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

3. *Sia data l'applicazione lineare* $F\colon\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^4,\quad X\mapsto MX$, *con* $M=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ *ed* $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$.

   (a) *Calcolare nucleo e immagine di F, esibendone una base. Dire se si tratta di un'applicazione iniettiva o suriettiva.*
   (b) *Determinare per quali $b\in\mathbf{R}^4$ il sistema lineare $MX=b$ è compatibile. Giustificare bene la risposta.*
   (c) *Determinare una base di $F(U)$, l'immagine tramite F del sottospazio $U=\{X\in\mathbf{R}^3\mid x_1=0\}$.*

(a) Il nucleo di F è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

e risulta

$$\ker F=\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}.$$

Dunque F è iniettiva. Un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ ad $\mathbf{R}^4$ non può essere suriettiva, dal momento che valgono comunque le disuguaglianze $\dim F(\mathbf{R}^3)\le\dim\mathbf{R}^3<\dim\mathbf{R}^4$.

L'immagine $F(\mathbf{R}^3)$ è il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dalle immagini degli elementi di una qualunque base del dominio, ad esempio

$$F(\mathbf{R}^3)=\operatorname{span}\{F(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}),F(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}),F(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})\}=\operatorname{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\}.$$

Si verifica facilmente che i vettori $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\}$ sono linearmente indipendenti, per cui costituiscono una base dell'immagine di F e

$$\dim F(\mathbf{R}^3)=3.$$

Guardando i tre generatori si vede che

$$F(\mathbf{R}^3) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x_3 = 0 \}.$$

(b) Il sistema lineare $MX = b$ è compatibile se e solo se il vettore dei termini noti b appartiene all'immagine di F in $\mathbf{R}^4$. Nel nostro caso specifico se e solo se è della forma $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}$, con $b_1, b_2, b_4 \in \mathbf{R}$.

(c) Abbiamo $U = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, da cui segue che

$$F(U) = \text{span}\{ F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \} = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Essendo generatori linearmente indipendenti, i vettori $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ sono una base di $F(U)$.

4. *Consideriamo matrici $n \times n$.*
   (a) Richiamare la definizione di matrice hermitiana e dare un esempio di matrice hermitiana 2×2 (con coefficienti non tutti reali).
   (b) Verificare che il determinante di una matrice hermitiana è reale.
   (c) Richiamare la definizione di matrice unitaria e verificare che il determinante di una matrice unitaria ha modulo 1.

(a) Una matrice M è hermitiana se ${}^tM = \overline{M}$. Esempio: $\begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{pmatrix}$.

(b) Per le proprietà del determinante, abbiamo

$$\det {}^tM = \det M = \det \overline{M} = \overline{\det M},$$

da cui segue che $\det M \in \mathbf{R}$ (un numero complesso che è uguale al suo complesso coniugato è necessariamente reale).

(c) Questo punto è contenuto nell'esercizio 4.2 delle dispense sugli spazi hermitiani.

5. *Sia data la forma quadratica $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$.*
   (a) Determinare una forma canonica metrica di Q.
   (b) Determinare un'isometria $X = MY$ che porti Q nella forma canonica metrica trovata al punto (a).
   (c) Sia $Q(y_1, y_2, y_3)$ una forma canonica metrica di Q. Fare un disegno approssimativo della superficie $Q(y_1, y_1, y_3) = 1$ (tagliarla con piani orizzontali).

(a) Scriviamo la forma quadratica come $Q(x_1, x_2, x_3) = {}^tXAX$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Poiché la matrice A è reale simmetrica, esiste una matrice ortogonale C tale che $C^{-1}AC = D$, dove D è una matrice diagonale con gli autovalori di A (che sono reali) sulla diagonale principale. Il polinomio caratteristico di A è dato da $p_\lambda(A) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-2)$; gli autovalori di A risultano dunque $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$, con autospazi

$$V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad V_0 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \quad V_2 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$

rispettivamente. Una forma canonica metrica di Q è data da $Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2$.

(b) Un'isometria che porta Q in tale forma è data da $X = CY$, cioè

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\sqrt{2} & -1\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

dove la matrice ortogonale C ha per colonne una base ortonormale di autovettori di A (l'ordine degli autovettori rispecchia quello degli autovalori come coefficienti di $Q(y_1, y_2, y_3)$).

(c) La superficie $Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 = 1$ è un cilindro ellittico in $\mathbf{R}^3$. L'asse del cilindro è parallelo all'asse y_3 (vedi filmetti sulla pagina web del corso).