COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Siano date le rette* $r: \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$ *ed* $s: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, *nello spazio* $\mathbf{R}^3$.
   (a) Scrivere un'equazione del piano π *perpendicolare ad* r *e passante per l'origine.*
   (b) Determinare se la retta s *è contenuta in* π*. Se non lo è, determinare un punto* P *su* s*, con* $P \notin \pi$*.*

(a) Scriviamo la retta r in forma parametrica: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $t \in \mathbf{R}$. Poiché il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è parallelo ad r, un'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per l'origine è data da

$$\pi: \quad x_2 + x_3 = 0.$$

(b) La retta s è contenuta in π se e solo se per ogni $t \in \mathbf{R}$ il generico punto $\begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ -t \end{pmatrix} \in s$ soddisfa l'equazione di π, ossia se e solo se

$$(1+t) + (-t) = 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbf{R}. \qquad (*)$$

Ciò è chiaramente falso: la retta s è addirittura parallela al piano π (l'equazione (*) non è soddisfatta per alcun valore di t). Dunque assegnando un valore qualsiasi al parametro t in $\begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ -t \end{pmatrix}$ si ottiene un punto P della retta s che non appartiene al piano π. Ad esempio $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. *Siano dati* $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}\}$, $W = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{R}^4$.
   (a) Determinare le dimensioni di V *e di* W*, esibendone una base.*
   (b) Determinare la dimensione di $V + W$*, esibendone una base.*
   (c) Determinare $\dim V \cap W$ *e se* $\mathbf{v} \in V \cap W$*.*

(a) Risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce V troviamo $V = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Poiché i generatori di V sono indipendenti, formano una base di V e $\dim V = 2$.

Osserviamo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, essi formano una base di W. In particolare, $\dim W = 2$.

(b) Lo spazio $V+W$ è generato dall'unione dei generatori di V e di W. Per Calcolare $\dim V+W$ dobbiamo determinare un insieme di generatori linearmente indipendenti di $V+W$. Ad esempio, usando l'eliminazione di Gauss per righe alla matrice che ha per righe i generatori di $V+W$ troviamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \to \dots \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono generatori linearmente indipendenti di $V+W$ e $\dim V+W=4$.
In particolare $V+W=\mathbf{R}^4$.
(c) Dalle formule di Grassmann $\dim V+W = \dim V + \dim W - \dim V\cap W$, troviamo $\dim V\cap W = 2+2-4=0$.
In particolare $V\cap W=\{O\}$, cioè consiste nel solo vettore nullo.
Il vettore $\mathbf{v}$ è diverso dal vettore nullo, dunque $\mathbf{v}\notin V\cap W$.

3. *Siano* $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e sia* $\pi_{\mathbf{v}}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *la proiezione ortogonale su* $\mathbf{v}$.
   (a) Scrivere la formula generale di $\pi_{\mathbf{v}}$ *e verificare che* $\pi_{\mathbf{v}}$ *è lineare.*
   (b) Calcolare $\pi_{\mathbf{v}}(2\mathbf{w}+3\mathbf{v})$.
   (c) Determinare nucleo e immagine di $\pi_{\mathbf{v}}$ *ed esibirne una base. Giustificare le risposte e darne un'interpretazione geometrica.*

(a) Sia $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$. La formula generale di $\pi_{\mathbf{v}}$ è data da

$$\pi_{\mathbf{v}}(X)=\frac{X\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}=\frac{x_1+x_2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{x_1+x_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ci sono diversi modi per verificare che $\pi_{\mathbf{v}}$ è lineare:
poiché il prodotto scalare soddisfa $(aX+bY)\cdot\mathbf{v}=a(X\cdot\mathbf{v})+b(Y\cdot\mathbf{v})$, per ogni $X,.Y\in\mathbf{R}^3$ e ogni $a,b\in\mathbf{R}$, si ottiene

$$\pi_{\mathbf{v}}(aX+bY)=\frac{(aX+bY)\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}=\frac{a(X\cdot\mathbf{v})+b(Y\cdot\mathbf{v})}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}=a\frac{X\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}+b\frac{Y\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}=a\pi_{\mathbf{v}}(X)+b\pi_{\mathbf{v}}(Y).$$

Si può verificare usando la formula generale di $\pi_{\mathbf{v}}$

$$\pi_{\mathbf{v}}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{x_1+x_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dots \quad \dots$$

infine segue anche dal fatto che siamo riusciti ad esprimere $\pi_{\mathbf{v}}$ mediante la moltiplicazione per una opportuna matrice

$$\pi_{\mathbf{v}}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

fatto che caratterizza appunto le applicazioni lineari.

(b)

$$\pi_{\mathbf{v}}(2\mathbf{w}+3\mathbf{v}) = 2\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) + 3\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = 0$, visto che $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ e $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, visto che si proietta su $\mathbf{v}$.
(c) Abbiamo $\ker \pi_{\mathbf{v}} = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid X \cdot \mathbf{v} = 0\} = \mathbf{v}^{\perp}$. Dunque il nucleo è il complemento ortogonale alla retta generata da $\mathbf{v}$, che è il piano per l'origine di equazione $x_1 + x_2 = 0$. Una sua base è data dai vettori $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
L'immagine è la retta per l'origine generata da $\mathbf{v}$, cioè $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{R}^3) = \mathrm{span}\{\mathbf{v}\}$.

4. *Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. *Sia* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) *Determinare autovalori e autospazi di F.*
   (b) *Determinare un insieme massimale di autovettori di F linearmente indipendenti. Dire se F è diagonalizzabile.*
   (c) *Calcolare $F(\mathbf{v})$ ed $F^n(\mathbf{v})$, dove F^n è l'applicazione composta $\underbrace{F \circ \ldots \circ F}_{n \text{ volte}}$, con $n \in \mathbf{N}$.*

(a) Il polinomio caratteristico della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è $p_\lambda(M) = -\lambda^2(\lambda-2)$. Dunque gli autovalori di M sono $\lambda = 2$, con molteplicità uno, e $\lambda = 0$, con molteplicità due. Osserviamo che la matrice M ha rango uno, per cui la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ era a priori ≥ 2.
L'autospazio di $\lambda = 2$ è dato da

$$V_2 = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\};$$

l'autospazio di $\lambda = 0$ è dato da

$$V_0 = \ker F = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Poiché esiste una base di $\mathbf{R}^3$ fatta di autovettori di M, la matrice M è diagonalizzabile.
(c) Poiché $\mathbf{v} \in V_2$, abbiamo $F(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$ ed $F^n(\mathbf{v}) = 2^n\mathbf{v}$.

5. *Sia data la conica* $\mathcal{C}: \quad 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 3 = 0$ *in* $\mathbf{R}^2$.
   (a) *Determinare una forma canonica metrica di $\mathcal{C}$, farne un disegno e dire di cosa si tratta.*
   (b) *Determinare un'isometria $X = MY$ che porta $\mathcal{C}$ in tale forma.*
   (c) *Determinare le equazioni degli assi di simmetria di $\mathcal{C}$ nel sistema di coordinate (x_1, x_2).*

(a) La forma quadratica associata alla conica $\mathcal{C}$ è data da $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$; la matrice simmetrica associata è $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, che ha autovalori $\lambda = 6$ e $\lambda = 2$ e autospazi $V_6 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $V_2 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
In un sistema di coordinate (y_1, y_2) indotte da una base ortonormale di autovettori di A, ad esempio $\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\}$, l'equazione della conica diventa (forma canonica metrica)

$$6y_1^2 + 2y_2^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_1^2}{1/2} + \frac{y_2^2}{3/2} = 1.$$

Si tratta di un'ellisse che interseca l'asse y_1 nei punti $\begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ e l'asse y_2 nei punti $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (queste coordinate si riferiscono ovviamente al sistema (y_1, y_2)).

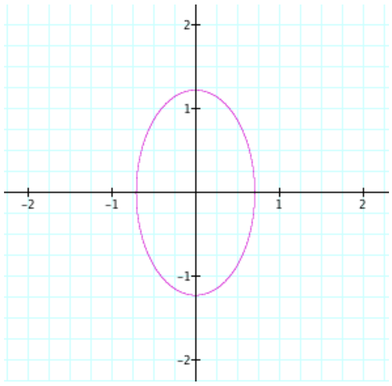

Fig.1. L'ellisse $\frac{y_1^2}{1/2} + \frac{y_2^2}{3/2} = 1$.

(b) Un'isometria che porta l'equazione della conica nella forma canonica metrica qui sopra è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

e corrisponde al cambiamento di coordinate

$$x_1 = (1/\sqrt{2})y_1 - (1/\sqrt{2})y_2, \qquad x_2 = (1/\sqrt{2})y_1 + (1/\sqrt{2})y_2. \tag{**}$$

(c) Nel sistema di coordinate (y_1, y_2) gli assi di simmetria della conica coincidono con gli assi coordinati $y_2 = 0$ e $y_1 = 0$. Per ottenere le rispettive equazioni nel sistema (x_1, x_2), invertiamo le relazioni (**)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = (1/\sqrt{2})x_1 + (1/\sqrt{2})x_2 \\ y_2 = -(1/\sqrt{2})x_1 + (1/\sqrt{2})x_2 \end{cases}.$$

Ricaviamo

$$\begin{cases} y_2 = 0 & \Leftrightarrow & -x_1 + x_2 = 0 \\ y_1 = 0 & \Leftrightarrow & x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

In altre parole, l'asse $y_2 = 0$ è la bisettrice del primo e del terzo quadrante del sistema (x_1, x_2), mentre l'asse $y_1 = 0$ è la bisettrice del secondo e del quarto.

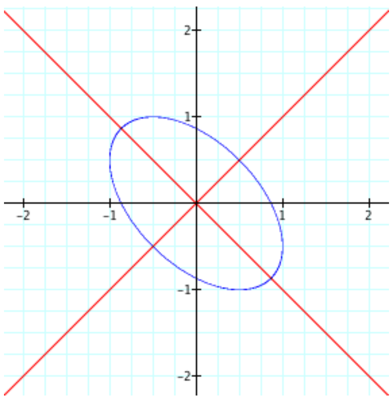

Fig.2. L'ellisse $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 3 = 0$ e i suoi assi di simmetria.