GEOMETRIA e ALGEBRA (Ing. Elettronica - Geatti) ESONERO 2 Roma, 28 novembre 2006, ore 10–12.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. *Siano dati*

$$F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

   (a) *Determinare il nucleo di F, esibendone una base. Dire se F è iniettiva.*
   (b) *Determinare la dimensione dell'immagine di F. Dire se F è suriettiva.*
   (c) *Determinare una base dell'immagine $F(U)$ e la dimensione di $U \cap \ker F$.*

(a) Per definizione il nucleo di F è dato da

$$\ker F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Essendo $\dim \ker F > 0$, l'applicazione F non è iniettiva.
(b) La dimensione dell'immagine di F può essere ricavata dalla formula

$$\dim F(R^4) = \dim \mathbf{R}^4 - \dim \ker F = 4 - 2 = 2.$$

Siccome $\dim F(R^4) = 2 < 3 = \dim \mathbf{R}^3$, l'applicazione non è suriettiva.
Alternativamente:
L'immagine di F è generata ad esempio dalle colonne della matrice di F, che sono immagini dei vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$:

$$F(\mathbf{R}^4) = \mathrm{span} \left\{ F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \dots, F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base di $F(\mathbf{R}^4)$ è data dai due vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. In particolare $\dim F(R^4) = 2$.
(c) Il sottospazio U è dato da

$$U = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ed ha dimensione $\dim U = 2$.
La sua immagine è data da

$$F(U) = \mathrm{span} \left\{ F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ed ha dimensione $\dim F(U) = 1$. Dalla formula $\dim U = \dim \ker F \cap U + \dim F(U)$, si trova $\dim U \cap \ker F = 1$.

2. *Sia* $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *l'applicazione data da* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *(rispetto alla base canonica in dominio e codominio).*

   (a) *Determinare la matrice rappresentativa di* F *rispetto alla base* $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ *in dominio e codominio.*

   (b) *Chi sono autovalori e autospazi di* F*?*

(a) Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2, \mathcal{C} & \xrightarrow{M} & \mathbf{R}^2, \mathcal{C} \\ \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & & \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ \mathbf{R}^2, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{M}=?} & \mathbf{R}^2, \mathcal{B} \end{array}$$

dove $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, il cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica è dato da $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e il cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ è dato da $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = (C_{\mathcal{B},\mathcal{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. La matrice cercata $\widetilde{M}$ risulta

$$\widetilde{M} = C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \circ M \circ C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ è diagonale: dunque gli autovalori di F sono $\lambda = 3, 1$ e gli autospazi sono $V_3 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $V_1 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

3. *Sia data la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) *Calcolare il determinante di* M.

   (b) *Calcolare il determinante di* $M^3 M^t$ *(qui* M^t *indica la trasposta di* M*).*

   (c) *Sia* A *la matrice inversa di* M*. Esprimere l'inversa di* MM^t *in termini di* A*.*

Possiamo calcolare $\det M$ con il Teorema di Laplace, oppure mediante l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

C'e' stato uno scambio di righe. Quindi $\det M = -(-2)(-2) = -4$.
(b) $\det(M^3 M^t) = \det(M^3)\det(M^t) = \det(M)^3 \det(M) = (-4)^3(-4) = 4^4 = 256$.
(c) $(MM^t)^{-1} = (M^t)^{-1} M^{-1} = (M^{-1})^t M^{-1} = A^t A$.

4. *Sia* $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare data da* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

   (a) *Determinare autovalori e autospazi di* F.

   (b) *Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di* F*. Dire se* F *è diagonalizzabile, giustificando la risposta.*

   (c) *Dire se* F *è iniettiva o suriettiva, giustificando la risposta.*

(a) Il polinomio caratteristico di F è dato da

$$P_\lambda = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

ed ha radici $\lambda = 3, 1$, con $\lambda = 1$ radice doppia. I rispettivi autospazi sono:

$$V_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \},$$

di dimensione due.

$$V_3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \},$$

di dimensione uno.

(b) Un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F è dato dai vettori

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Essi formano una base di $\mathbf{R}^3$ e dunque l'applicazione F è diagonalizzabile.

(b) L'applicazione F è iniettiva perché non ha $\lambda = 0$ come autovalore (il nucleo di F sarebbe l'autospazio dell'autovalore $\lambda = 0$). F è anche suriettiva perché $3 = \dim \mathbf{R}^3 = \dim \ker F + \dim F(\mathbf{R}^3) = \dim F(\mathbf{R}^3)$.