GEOMETRIA e ALGEBRA (Ing. Elettronica - Geatti) ESONERO 1 Roma, 30 ottobre 2006, ore 17–19.

COGNOME .... *NOME* .... Data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1(a) *Scrivere la definizione di sottospazio di uno spazio vettoriale.*

(b) Determinare se i sottoinsiemi $S = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$ *e* $T = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \geq 1\}$ *sono sottospazi vettoriali di* $\mathbf{R}^2$ *(usando la definizione).*

(c) Esibire un elemento di S *e un elemento di* T*. Disegnare* S *e* T*.*

(a) Sia V uno spazio vettoriale. Un sottospazio è un sottoinsieme non vuoto $S \subset V$ che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per gli scalari:
- per ogni s, t in S, vale $s + t \in S$;
- per ogni $s \in S$ e per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, vale $\lambda s \in S$.

(b) Dalla definizione di S si ricava $S = \{\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}\}$. Presi elementi $\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$ di S e $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha che

$$\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a+b) \\ a+b \end{pmatrix} \in S, \qquad \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 2a \\ \lambda a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda a \\ \lambda a \end{pmatrix} \in S.$$

Dunque S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.

Sia $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, con $x_2 \geq 1$, un elemento di T. Si vede subito che la condizione $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in T$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, non è verificata. Basta prendere ad esempio $\lambda < 0$. Dunque T non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.

(c) Un elemento di S è ad esempio $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un elemento di T è ad esempio $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il sottospazio S è la retta per l'origine di equazione $x_1 - 2x_2 = 0$. Il sottoinsieme T è la parte di piano al di sopra della retta orizzontale $x_2 = 1$ (retta inclusa).

2. *Siano dati* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e sia* $U = \mathrm{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

(a) Verificare che $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ *è una base di* U*.*

(b) Determinare se $\mathbf{x}$ *appartiene ad* U*.*

(c) Verificare che $\mathbf{y}$ *appartiene ad* U *e determinare le sue coordinate nella base* $\mathcal{B}$*.*

(a) Osserviamo innanzitutto che i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti (non sono uno multiplo dell'altro). Si ha che $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ è una base di U se e solo se il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al sottospazio $\mathrm{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$, generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$. Si ha infatti che $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$:

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{w} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 1.$$

(b) Si ha che $\mathbf{x} \in U$ se e solo se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{w} = \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b \\ a \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \\ -1 = 1 (assurdo). \end{cases}$$

In conclusione, $\mathbf{x}$ non appartiene ad U.

(c) Si ha che $\mathbf{y} \in U$ se e solo se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} b \\ a \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 1,\ b = -1.$$

Le coordinate di $\mathbf{y}$ nella base $\mathcal{B}$ sono proprio i coefficienti $a = 1,\ b = -1$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

3. *Sia* $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0\}$ *e siano* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare una base di U.
   (b) Completare la base trovata ad una base di $\mathbf{R}^3$.
   (c) Determinare quali fra gli insiemi di vettori $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$ *sono basi di* U *(motivare bene le risposte).*

(a) Risolvendo l'equazione che lo definisce, si trova $U = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$. Poiché sono generatori indipendenti di U (sono non collineari), i vettori $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ formano una base di U. In particolare, $\dim U = 2$.
(b) Poiché $\dim \mathbf{R}^3 = 3$ (tutte e sole le basi di $\mathbf{R}^3$ sono costituite da tre vettori linearmente indipendenti), cerchiamo un terzo vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ in modo che la terna $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \}$ sia una base di $\mathbf{R}^3$. Ad esempio possiamo usare $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Infatti la terna

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

è una base di $\mathbf{R}^3$.
(c)
$\{A, B\}$ è una base di U: infatti $\dim U = 2$, i vettori appartengono entrambi ad U e sono indipendenti.
$\{A, C\}$ non è una base di U: i vettori non appartengono entrambi ad U.
$\{A, D\}$ non è una base di U: i vettori appartengono entrambi ad U ma non sono indipendenti.

4. *Siano dati i sottospazi* $U = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ *e* $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 + x_3 = 0\}$ *in* $\mathbf{R}^4$.
   (a) Determinare una base del sottospazio $U \cap V$ *e calcolare* $\dim(U \cap V)$.
   (b) Calcolare $\dim(U + V)$.
   (c) Determinare se U *è contenuto in* V *(spiegare la risposta).*

(a) Il generico elemento di U è della forma

$$a\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a-b\\a\\b\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbf{R}.$$

Un vettore di questo tipo soddisfa le equazioni di V se e solo se $b=2a$, ossia è della forma

$$\begin{pmatrix}0\\-a\\a\\2a\end{pmatrix},\quad a\in\mathbf{R}.$$

Una base di $U\cap V$ è data dal vettore $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$ e $\dim U\cap V=1$.

(b) Poiché i generatori di U sono linearmente indipendenti, $\dim U=2$. Poiché V è dato dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di una equazione in 4 incognite ha dimensione 3. Si può anche verificare che una base di V è data dai vettori

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

Dalle formule di Grassmann si ottiene

$$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim U\cap V=2+3-1=4.$$

(c) Si vede immediatamente che il primo generatore di U non soddisfa l'equazioene di V. Quindi U non è contenuto in V. Notare che se U è contenuto in V, allora $\dim U\cap V=\dim U$ e $\dim(U+V)=\dim V$. Entrambe queste relazioni sono false nel nostro caso.