COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

(1) Siano dati i sottospazi $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$ e $W = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(a) Determinare $V \cap W$ esibendone una base. Determinare la dimensione di $V + W$.

(b) Determinare un sottospazio complementare a V in $\mathbf{R}^3$. È unico? Se non lo è determinarne un altro.

(c) Determinare se il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a W.

(a) Osserviamo intanto che $W = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, che i vettori $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ formano una base di W e che $\dim W = 2$. Inoltre $\dim V = 2$ e $W \subset V$. Dunque

$$V = W, \quad V \cap W = V + W = V = W, \quad \dim V + W = 2.$$

Ovviamente una base di W è anche una base di $V \cap W$.

(b) Un sottospazio V^c complementare a V in $\mathbf{R}^3$ è un sottospazio di dimensione uno tale che $V^c + V = \mathbf{R}^3$ e $V^c \cap V = \{0\}$. Se $\mathbf{x}$ è un qualunque vettore non nullo che non appartiene a V, allora $V^c = \mathrm{span}\{\mathbf{x}\}$ è un sottospazio complementare a V in $\mathbf{R}^3$. Non è unico. Nel nostro caso, possiamo scegliere ad esempio

$$V^c = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad V^c = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Poichè $W = V$ e $\mathbf{v}$ non soddisfa l'equazione di V, si ha che $\mathbf{v} \notin W$.

2. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare il nucleo di f, esibendone una base.

(b) Determinare un sottospazio V del dominio tale che $\dim f(V) < \dim V$.

(c) Determinare un sottospazio V del dominio tale che $\dim f(V) = \dim V$.

(a) $\ker f = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = x_2\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. In particolare, $\dim \ker f = 2$ e $\dim f(V) = 1$.

(b) Lo spazio $V = \mathbf{R}^3$ soddisfa $\dim f(V) = 1 < 3 = \dim V$.

(c) Sia $V = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Si ha che $f(V) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$, per cui $\dim f(V) = \dim V = 1$.

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ un'applicazione lineare che ha i vettori $\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ come autovettori di autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ rispettivamente.

(a) Determinare la matrice rappresentativa di f nella base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

(a) La matrice rappresentativa di f nella base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo) è la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ avente gli autovalori (corrispondenti agli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$) sulla diagonale principale.
(b) La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo) è data da

$$M = C_{B,C} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} C_{B,C}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

dove $C_{B,C}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base B alla base canonica C (vedi diagrammi dispense).

4. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare autovalori e autospazi di F;
   (b) Determinare un insieme massimale di autovettori di F linearmente indipendenti. Dire se F è diagonalizzabile.
   (c) Determinare se il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di F. Spiegare bene la risposta.

(a) Il polinonio caratteristico di F è dato da $p_\lambda = (1-\lambda)(\lambda-2)\lambda$ e gli autovalori sono $\lambda = 0, 1, 2$. I rispettivi autospazi sono dati da

$$V_0 = \ker F = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \quad V_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad V_2 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

(b) I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F. Poiché formano una base di $\mathbf{R}^3$, l'applicazione risulta diagonalizzabile. Questo era già prevedibile, visto che gli autovalori di F sono reali e distinti.
(c) Il vettore $\mathbf{v}$ non è autovettore di F: infatti $\mathbf{v}$ non appartiene a nessuno degli austospazi trovati. Direttamente dalla definizione si vede anche che $F(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ non è multiplo di $\mathbf{v}$.