GEOMETRIA e ALGEBRA Parte 1 (Ing. Elettronica - Geatti) APPELLO 3 Roma, 17/09/2007, ore 10–12

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

(1.a) Richiamare la definizione di base di uno spazio vettoriale V di dimensione n.

(1.b) Dato il sottospazio $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$, quali dei seguenti insiemi di vettori formano una base di V? $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$,.

(1.c) Determinare un sottospazio complementare a V in $\mathbf{R}^3$. È unico? Se non lo è, determinarne un altro.

(a) Una base di uno spazio vettoriale V di dimensione n è un insieme ordinato di generatori linearmente indipendenti. Ogni base di V ha cardinalità n.

(b) V è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di una equazione *indipendente* in tre incognite. Quindi è uno spazio vettoriale di dimensione due. Una base di V si trova risolvendo il sistema. Ad esempio $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$. I vettori $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ non formano una base di V, che ha necessariamente cardinalità due. I vettori $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ formano una base di V: appartengono a V, sono indipendenti e sono esattamente due. I vettori $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ non formano una base di V: sono due, sono indipendenti, ma il primo non appartiene a V.

(c) Un sottospazio complementare a V in $\mathbf{R}^3$ è dato ad esempio da $W = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$: basta verificare che $W \cap V = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ e che $\mathbf{R}^3 = V + W$. La dimensione di W è necessariamente uguale ad uno. Di sottospazi complementari a V in $\mathbf{R}^3$ ce ne sono infiniti: ogni sottospazio di dimensione uno generato da un vettore che non appartiene a V è sottospazio complementare a V in $\mathbf{R}^3$. Un altro è ad esempio $W = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \}$.

2. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare il nucleo di f, esibendone una base.
   (b) Determinare una base di $f(V)$, dove V è il sottospazio dell'esercizio 1.
   (c) Determinare un vettore di $\mathbf{R}^3$ che non appartiene all'immagine di f.

(a) Il nucleo di f è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Risulta

$$\ker f = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}, \quad \dim\ker f = 1.$$

Una base di $\ker f$ è data dal vettore $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$.

(b)

$$f(V) = \mathrm{span}\{f(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\}.$$

Una base di $f(V)$ è data dai vettori $\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\}$.

(c) A occhio si vede che un qualunque vettore di $\mathbf{R}^3$ con la seconda coordinata diversa dalla terza non appartiene all'immagine di f.

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ un'applicazione lineare che ha i vettori $\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$ come autovettori di autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ rispettivamente.
   (a) Determinare la matrice rappresentativa di f nella base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

(a) La matrice rappresentativa di f nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo) è data da

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

(b) La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo) è data da

$$M = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2\\1 & 3\end{pmatrix}.$$

Qui $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ indica il cambiamneto di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica (vedi diagrammi dispense...)

4. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
   (a) Determinare autovalori e autospazi di F;
   (b) Determinare un insieme massimale di autovettori di F linearmente indipendenti. Dire se F è diagonalizzabile.
   (c) Determinare se il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di F. Spiegare bene la risposta.

(a) Il polinomio caratteristico di F è dato da $p_\lambda = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$. Gli autovalori sono dunque $\lambda = 1$ con molteplicità due e $\lambda = -1$. Gli autospazi sono

$$V_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}, \quad V_{-1} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}.$$

(b) Un insieme massimale di autovettori di F linearmente indipendenti è dato da

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Poichè questi autovettori formano una base di $\mathbf{R}^3$, l'applicazione risulta diagonalizzabile. In questa base (in dominio e codominio), la matrice rappresentativa di F è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Poiché F è iniettiva (una qualunque matrice rappresentativa ha determinante diverso da zero), è anche suriettiva, ossia $F(\mathbf{R}^3) = \mathbf{R}^3$. In particolare un qualunque vettore di $\mathbf{R}^3$ appartiene all'immagine di F.