COGNOME .... *NOME* .... Data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1.(a) *Richiamare la definizione di sottospazio di uno spazio vettoriale V.*

(b) Richiamare la definizione di lineare indipendenza per vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ in uno spazio vettoriale V.

(c) Usando la definizione, verificare che l'insieme $S = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.

(d) Dire se S contiene o meno due vettori linearmente indipendenti. Spiegare bene la risposta.

(a) Vedi dispense.

(b) Vedi dispense.

(c) $S = \{\begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R}\}$. Dati $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$ generici elementi in S e $\lambda \in \mathbf{R}$, si ha

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2(x+y) \\ (x+y) \end{pmatrix} \in S, \qquad \lambda s = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ \lambda x \end{pmatrix} \in S.$$

Dunque S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.

(d) $S = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Dall'espresione di S è evidente che tutti i suoi elementi sono multipli di uno dell'altro e $\dim S = 1$. Siccome la dimensione di S coincide col massimo numero di vettori linearmente indipendenti in S, si ha che S non contiene due vettori linearmente indipendenti.

2. *Siano dati i sottospazi $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}\}$ e $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}\}$ in $\mathbf{R}^4$.*

(a) Determinare una base di V e la sua dimensione. Determinare la dimensione di W.

(b) Completare la base di V trovata in (a) ad una base di $\mathbf{R}^4$.

(c) Determinare se W è un sottospazio complementare di V in $\mathbf{R}^4$, spiegando la risposta.

(a) Risolvendo il sistema troviamo $V = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono generatori linearmente indipendenti di V, quindi sono una base di V e $\dim V = 2$. Il sottospazio W è dato da $W = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Si può anche osservare che W è definito da un sistema lineare omogeneo di due equazioni indipendenti in 4 incognite. Quindi $\dim W = 2$.

(b) Una base di $\mathbf{R}^4$ i cui primi due vettori sono la base di V trovata al punto precedente è data ad esempio da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Guardando i generatori di V e W si vede che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V \cap W$. Quindi W non può essere un complementare di V in $\mathbf{R}^4$.

3. *Sia* $F\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare data da* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di F.

(b) Determinare una base di $F(V)$, *dove* V *è il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *di equazioni* $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$

(c) Determinare la dimensione di $(\ker F) \cap V$, *giustificando la risposta.*

(a) Il nucleo di F è dato da

$$\ker F = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \}.$$

Una base di $\ker F$ è data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'immagine di F è generata dalle colonne della matrice rappresentativa di F. Una base di $F(\mathbf{R}^4)$ è data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Il sottospazio V è dato da $V = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ e la sua immagine è data da

$$F(V) = \mathrm{span}\{ F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $F(V)$.

(c) $\dim(\ker F) \cap V = \dim V - \dim F(V) = 2 - 2 = 0$.

4. *Sia* $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ *l'applicazione lineare data da* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, *nella base canonica in dominio e codominio.*

(a) Determinare la matrice rappresentativa di F *nella base* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *in dominio e codominio.*

(b) Determinare autovalori e autospazi di F.

(c) Dire se F *è iniettiva.*

(a) Sia $\mathcal{C}$ la base canonica e sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dal diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{R}^2, \mathcal{C} & \xrightarrow{M} & \mathbf{R}^2, \mathcal{C} \\
\uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & & \downarrow C^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\
\mathbf{R}^2, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{M}=?} & \mathbf{R}^2, \mathcal{B}
\end{array}$$

ricaviamo

$$\widetilde{M} = C^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} M C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Il fatto che nella base $\mathcal{B}$ in dominio e codominio la matrice di F sia diagonale significa che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di F. Precisamente, gli autovalori di F sono $\lambda = 5$ e $\lambda = 2$ e gli autospazi di F sono rispettivamente

$$V_5 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \qquad V_2 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

(c) Si può verificare direttamente che F è iniettiva (il determinante della matrice rappresentativa di F in qualunque base è diverso da zero). Si può anche osservare che F non ha autovalori nulli.