COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. *Dati i sottospazi* $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\}$ *e* $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *in* $\mathbf{R}^4$,

(a) Determinare una base di $V \cap W$ *e la sua dimensione;*
(b) Determinare una base di $W + V$ *e la sua dimensione;*
(c) Dire se $V \subset W$ *o* $W \subset V$*, spiegando le risposte.*

(a) Osserviamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e che i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Dunque $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ed i vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di W. Per determinare una base di $V \cap W$ sia

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ a+b \\ a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

un generico vettore di W. Questo vettore appartiene anche a V se e solo se le sue coordinate soddisfano le equazioni di V

$$\begin{cases} a = a \\ a = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad V \cap W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una base di $V \cap W$, che ha dimensione 1.

(b) Si ha $\dim V = \dim W = 2$ e $\dim(V \cap W) = 1$. Quindi

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 3.$$

Una base di $V + W$ è data da

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

(c) Nessuno dei due sottospazi è contenuto nell'altro visto che $\dim(V \cap W) = 1$, mentre entrambi hanno dimensione 2.

2. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *data da* $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Dimostrare che l'applicazione f *è lineare.*
   (c) Determinare il nucleo di f*, esibendone una base.*

(b) Determinare se il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *appartiene all'immagine di* f.

(a) Si può verificare che f è lineare usando la definizione (vedi dispense). Oppure si può osservare che

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

cioè è data dal prodotto matrice-vettore. Dunque è lineare.
(b) Risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases},$$

troviamo $\ker f = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
(c) Considerando il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 - x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases},$$

troviamo che è incompatibile. Dunque il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non appartiene all'immagine di f.

3. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *data da* $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ *e siano* $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare la matrice rappresentativa di f *nella base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).*
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f *rispetto alla base* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *(nello spazio di partenza e in quello di arrivo).*

(a) La matrice rappresentativa di f nella base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo) è data da $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
La matrice rappresentativa di f nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo) si può determinare considerando il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{M} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & & \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{M}=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$

La matrice cercata è

$$\widetilde{M} = C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} M C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} M C_{\mathcal{B},\mathcal{C}},$$

dove $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice di f nella base canonica trovata al punto precedente, $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica e $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$. In totale risulta

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(per caso le matrici M e $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ commutano!).

4. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. *Calcolare* A^{1000}.

Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$P_\lambda = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

Gli autovalori di A (reali e distinti) sono dunque $\lambda = 4, 2$. I rispettivi autospazi sono:

$$V_4 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad V_2 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A è data da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Vale

$$A = CDC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

dove $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonale con gli autovalori di A sulla diagonale principale e $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica. Per verificare ciò, considerare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2, \mathcal{C} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^2, \mathcal{C} \\ \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} & & \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ \mathbf{R}^2, \mathcal{B} & \xrightarrow{D} & \mathbf{R}^2, \mathcal{B} \end{array}$$

A questo punto

$$A^{1000} = CDC^{-1}CDC^{-1} \ldots CDC^{-1} = CD^{1000}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{1000} & 0 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = etc...$$

$$... = \begin{pmatrix} 2^{1999} + 2^{999} & 2^{1999} - 2^{999} \\ 2^{1999} - 2^{999} & 2^{1999} + 2^{999} \end{pmatrix}.$$