GEOMETRIA e ALGEBRA 1/bis (Monsurrò-Geatti) ESONERO 2 Roma, 29 novembre 2005, ore 11–13.

COGNOME .... *NOME* .... Data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Siano date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.
   a) Dire se la matrice A è invertibile. Se possibile, calcolarne l'inversa.
   b) Calcolare $B \cdot {}^tB$. Chi è l'inversa di B ? (qui ${}^tB$ indica la trasposta di B)
   c) Calcolare $\det B^{51}$.

(a) Poiché $\det A = 6 \neq 0$, la matrice A è invertibile. La sua inversa si può calcolare col metodo di eliminazione di Gauss, oppure direttamente con le formule drivanti dalle identità del teorema di Laplace. Risulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

(b) Otteniamo $B \cdot^t B = I$, dove I denota la matrice identitá. Di conseguenza l'inversa della matrice B coincide con la sua trasposta.
(c) Otteniamo $\det(B) = 1$, quindi $\det(B^{51}) = (\det(B))^{51} = 1^{51} = 1$.

2. Siano $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ e $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ le applicazioni lineari definite rispettivamente da

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad G\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_3 \\ 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

   a) Determinare l'applicazione composta $F \circ G$.
   b) Richiamare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare $L\colon V \to W$.
   c) Determinare una base del nucleo di $F \circ G$ e la sua dimensione. Qual è la dimensione dell'immagine di $F \circ G$?

a) Calcoliamo la matrice dell'applicazione composta $F \circ G$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Si dice nucleo di un'applicazione lineare L l'insieme degli elementi di V la cui immagine tramite L é il vettore nullo di W; in simboli

$$\mathrm{Ker}(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$$

(c) Il nucleo di $F \circ G$ é dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $M \cdot X = 0$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Le soluzioni sono dunque della forma

$$\mathrm{Ker}(F \circ G) = \{\begin{pmatrix} s \\ t \\ -(s+t) \end{pmatrix} \ ; \ s, t \in \mathbf{R}\}.$$

Pertanto, la dimensione del nucleo è due e una base è data da

$$\mathcal{B}_K = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

Si deduce che la dimensione dell'immagine è $3 - 2 = 1$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{100}.

Se la matrice A è diagonalizzabile, ossia $A = CDC^{-1}$, con D matrice diagonale e C matrice invertibile, possiamo calcolare agevolmente qualsiasi potenza di A mediante

$$A^n = CDC^{-1} \dots CDC^{-1} = CD^nC^{-1}.$$

Nel nostro caso, il polinomio caratteristico di A è dato da $P_\lambda(A) = \lambda(\lambda - 2)$. Dunque A ha autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$, reali e distinti, e risulta diagonalizzabile. Gli autospazi sono dati rispettivamente da

$$V_0 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = 0 \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \quad V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0 \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

Sia $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ una base formata da autovettori di A e sia $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$. Dal diagramma commmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2, \mathcal{C} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^2, \mathcal{C} \\ \big\downarrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & & \big\uparrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ \mathbf{R}^2, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}} & \mathbf{R}^2, \mathcal{B} \end{array}$$

segue che

$$A = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \widetilde{A} C^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{99} & -2^{99} \\ -2^{99} & 2^{99} \end{pmatrix}.$$

4. Sia $F \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare autovalori e autospazi di F.
(b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti e dire se F è diagonalizzabile.
(c) Determinare se F è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(a) Il polinomio caratteristico di A è dato da $P_\lambda(A) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)$ ed ha radici $\lambda = 0$, doppia, e $\lambda = 2$. Gli autospazi corrispondenti sono dati da

$$V_0 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \},$$

e

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

(b) Poiché $\dim V_0 = \dim V_2 = 1$, un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti contiene 2 autovettori $\{v_1, v_2\}$, con $v_1 \in V_0$ e $v_2 \in V_2$; ad esempio

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

In particolare, non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di Fe l'applicazione F non è diagonalizzabile. Osserviamo che $\dim V_0 = 1$, mentre la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è due.
(c) Poiché $\dim \ker F = \dim V_0 = 1 > 0$, l'applicazione F non è iniettiva, né suriettiva: infatti $\dim F(\mathbf{R}^3) = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \ker F < 3$. Da cui neanche biiettiva.