GEOMETRIA e ALGEBRA 1/bis (Monsurrò-Geatti) ESONERO 1 Roma, 26 ottobre 2005, ore 18–20.

COGNOME .... *NOME* .... Data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1(a) Scrivere la definizione di sottospazio vettoriale.

(b) Dimostrare che l'insieme $S = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \}$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{R}^4$.

(c) Determinare una base di S. *Che dimensione ha* S*?*

(a) Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme non vuoto di V chiuso rispetto alle operazioni di somma tra vettori e di moltiplicazione per uno scalare.

(b) Per verificare che S è un sottospazio vettoriale è quindi necessario dimostrare che esso è chiuso rispetto alla somma di vettori e rispetto al prodotto per uno scalare. Siano dunque $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ due vettori di S, ovvero due soluzioni del sistema dato. La loro somma $v+w = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4)$ verifica

$$\begin{cases} 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 2x_1 + x_2 + 2y_1 + y_2 = 0 + 0 = 0 \\ (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) = x_1 + x_3 + y_1 + y_3 = 0 + 0 = 0. \end{cases}$$

Il vettore $v + w$ appartiene dunque ancora ad S. In modo analogo, si verifica che, per ogni $v \in S$ e per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, il vettore λv verifica ancora il sistema dato ed appartiene quindi ancora ad S.

(c) Per trovare una base di S, scriviamo la matrice del sistema omogeneo e la trasformiamo, tramite operazioni elementari, in una matrice a scala. Otteniamo cosi' la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le variabili x_1 e x_2 sono pivot e le due restanti sono parametri liberi. Otteniamo quindi che la soluzione generale è data dall'insieme:

$$S = \{ \begin{pmatrix} -s \\ 2s \\ s \\ t \end{pmatrix}, \ s, \ t \in \mathbf{R} \}$$

ed una sua base B può essere scritta come

$$B = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

I due vettori generano S e sono linearmente indipendenti per costruzione.

La dimensione di S è due (due vettori nella base ottenuta), come indicava il fatto di essere definito da due equazioni indipendenti su $\mathbf{R}^4$ $(4 - 2 = 2)$.

2. Siano dati i sottospazi $U = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ *e* $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = 0 \}$ *in* $\mathbf{R}^3$.

(a) Determinare una base del sottospazio $U \cap V$ *e calcolarne la dimensione.*

(b) Determinare $\dim(U + V)$.

(c) Dire se U *è contenuto in* V *(spiegare la risposta).*

(a) Per calcolare l'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$, è preferibile che essi siano espressi tramite equazioni; per ottenere per U una tale espressione, scriviamo la matrice seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

ed imponiamo che, se trasformata in forma a scala, essa abbia solo 2 righe non nulle. Otteniamo cosí l'equazione $y = 0$. (osservando che i due vettori che generano U sono linearmente indipendenti e che, di conseguenza, la sua dimensione è due, potevamo prevedere che U fosse definito da una sola equazione.). Il sottospazio $U \cap V$ è quindi definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ \qquad x_2 = 0. \end{cases}$$

Abbiamo quindi

$$U \cap V = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} ; \ s \in \mathbf{R}\}$$

ed una base è data dal vettore $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$. La dimensione è quindi uguale ad uno.

(b) Abbiamo già osservato che $\dim(U) = 2$ (i due vettori che lo generano non sono proporzionali); essendo V definito da una sola equazione non banale in $\mathbf{R}^3$, abbiamo anche $\dim(V) = 2$. Per la formula di Grassmann, otteniamo quindi

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(u \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

(b) Per verificare che U non è contenuto in V, basta ad esempio osservare che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, uno dei suoi generatori, non soddisfa $x_1 - x_2 = 0$; esso non appartiene dunque a V.

3. Siano dati i vettori $\{v_1, v_2, v_3\} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ *in* $\mathbf{R}^3$.

(a) Determinare se sono linearmente indipendenti.
(b) Calcolare la dimensione di $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *ed esibire una base di* $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.
(c) Completare la base trovata ad una base di $\mathbf{R}^3$.

(a) Mettiamo i vettori in riga e applichiamo l'eliminazione di Gauss per righe alla matrice cosi' ottenuta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti.

(b) I vettori $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ sono generatori linearmente indipendenti di $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, cioè una sua base. Pertanto $\dim \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = 2$.

(c) Un completamento di $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ ad una base di $\mathbf{R}^3$ è dato ad esempio da

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Questi vettori messi in riga formano infatti una matrice a scala e sono linearmente indipendenti.

4. Sia S il sottospazio delle matrici 2×2 dato da $S = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.

(a) Verificare che $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ è una base di S. Che dimensione ha S?

(b) Determinare se $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene ad S.

(c) Verificare che $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartiene ad S e determinare le sue coordinate in $\mathcal{B}$.

(a) Le matrici di S sono precisamente le matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, 2, \mathbf{R})$ che soddisfano le condizioni $\begin{cases} b = d \\ c = 0. \end{cases}$ Ne segue che $\dim S = 2$. Inoltre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$. Poiché sono anche linearmente indipendenti (non hanno coefficienti proporzionali), formano una base $\mathcal{B}$ di S.

(b) Dalla caratterizzazione di S data al punto precedente, è chiaro che $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin S$. Si può anche verificare che non esistono numeri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: il sistema lineare corrispondente $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$ risulta infatti incompatibile.

(c) Per verificare che $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in S$ cerchiamo $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il sistema lineare corrispondente $\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \beta = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$ ha come soluzione $\alpha = -3, \beta = 2$, e dunque $N \in S$. Osserviamo che i coefficienti trovati sono unici, poiché esprimono N come combinazione lineare di elementi linearmente indipendenti. Per definizione, $\alpha = -3, \beta = 2$ sono le coordinate di N nella base $\mathcal{B}$.