1. Apostol: Sezione 1.15, Esercizi 16(a), 17, 18, 19.

2. Determinare le dimensioni dei seguenti sottospazi W ed esibirne due basi basi diverse, quando è possibile:

(i) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} -x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^5;$

(ii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 - x_4 = 0\} \quad \subset \mathbf{R}^4;$

(iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_1 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^3.$

(iv) $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^3;$

(v) $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^3;$

(vi) $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^2.$

Sol. (i) Risolviamo il sistema con l'algoritmo di Gauss-Jordan. La matrice del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice dei coefficienti è già in forma a scala. Ne ricaviamo che il rango della matrice dei coefficienti è uguale a 2. La dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale al numero di variabili meno questo rango, cioé a 3. Per determinare esplicitamente una base di W risolviamo il sistema:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ritraducendo questa matrice in un sistema lineare troviamo

$$\begin{cases} x_1 = (1/2)x_3 \\ x_2 = (1/2)x_3 \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1/2 \\ t_1/2 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbf{R}.$$

Una base di W è data dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una differente base di W è data dai tre vettori

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(ii) Lo spazio W è descritto da una equazione (non banale) in quattro incognite: la sua dimensione è $4-1=3$. Per determinarne una base osserviamo che i vettori di W sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_1\end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad t_i \in \mathbf{R}.$$

Una base di W è pertanto data ai tre vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Una differente base di W è data ai tre vettori

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(iii) Risolviamo il sistema con l'algoritmo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1 & 0\\1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

La matrice dei coefficienti ha rango tre, dunque la dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale a $3-3=0$. Ne segue che W è lo spazio vettoriale costituito dal solo vettore nullo: $W = \{\mathbf{0}\}$. La base di W è l'insieme vuoto $\emptyset$. Non ci sono altre basi di W.

(iv) Utilizziamo l'algoritmo di Gauss-Jordan per estrarre una base dal sistema di generatori dato:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è uguale a 2 e dunque la dimensione di W è uguale a 2. Inoltre poiché i *pivot* sono nella prima e seconda colonna, il primo ed il secondo dei generatori fornito formano una base di W, vale a dire, una base di W è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Una differente base di W è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(v) W è uno spazio di dimensione uno. Una sua base è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una differente base è data dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(vi) L'algoritmo di Gauss-Jordan mostra che la dimensione di W è 2. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una base di W è data dai due generatori forniti:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un'altra base è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_3 = 0 \} \qquad V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \};$$

esibirne una base.

Sol. I vettori di U sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbf{R}.$$

dunque una base di U è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per determinare una base di V risolviamo il sistema di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che la soluzione è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

dunque una base di V è data dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\} \qquad V = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & = 0 \end{cases}\}.$$

esibirne una base.

Sol. Per il primo sottospazio abbiamo un sistema di generatori. Per estrarne una base, mettiamo i vettori nelle righe di una matrice e applichiamo ad essa l'eliminazione di Gauss per righe.

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\1&1&1&0\\1&3&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix} \ldots \to \ldots \begin{pmatrix}1&-1&2&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Una base di U è costituita dai tre vettori

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Alternativamente: Per estrarne una base utilizziamo l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\-1&1&3&-1\\2&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&2&4&-2\\0&-1&-2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&1&2&-1\\0&-1&-2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&1&2&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Le colonne corrispondenti ai *pivot* sono la prima, la seconda e la quarta: una base di U è costituita dai tre vettori

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Per trovare una base di V risolviamo il sistema di due equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & = 0 \end{cases}$$

Si trova facilmente che la soluzione è

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\t_1\\t_2\end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbf{R}.$$

Dunque una base di V è data dai due vettori

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

5. Dimostrare che le seguenti terne di vettori sono basi di $\mathbf{R}^3$

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\}.$$

Calcolare le coordinate dei vettori $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ in ognuna di esse.

Sol. Usiamo in tutti e tre i casi l'agoritmo di Gauss-Jordan, scrivendo una matrice che ha a sinistra i tre vettori dati e a destra i vettori v e w. I tre vettori dati sono una base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se riusciamo a trasformare la parte a sinistra della matrice così ottenuta nella matrice identica 3×3 mediante operazioni elementari sulle righe. In tal caso le due colonne a destra della matrice trasformata sono le coordinate dei vettori v e w nella base formata dai tre vettori dati.

(i)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\1&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\end{array}\right)$$

(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&0&1&0\\-1&-1&3&1&0\\1&1&0&1&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&0&1&0\\0&1&3&2&0\\0&-1&0&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&0&1&0\\0&1&3&2&0\\0&0&3&2&1\end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&0&1&0\\0&1&3&2&0\\0&0&1&2/3&1/3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&0&1&0\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&2/3&1/3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&2\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&2/3&1/3\end{array}\right)$$

(iii)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&1&3&1&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&3&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1/3\end{array}\right)$$

6. Verificare che

$$\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix} \in \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\} \quad \text{in } \mathbf{R}^3.$$

In quanti modi si può scrivere $\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\}$?

Verificare che

$$\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix} \in \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\} \quad \text{in } \mathbf{R}^3.$$

In quanti modi si può scrivere $\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}$?

Spiegare i risultati.

Soluzione. Facciamo vedere che esistono $a, b, c \in \mathbf{R}$ tali che

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}.$$

Le soluzioni del sistema lineare non omogeneo corrispondente

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+2c=4 \\ -a+b-2c=-3 \end{cases}$$

sono infatti $a=1-b$, $c=1+b$, $b\in\mathbf{R}$. Questo vuol dire che per ogni $b\in\mathbf{R}$

$$(1-b)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(1+b)\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}.$$

Quindi $\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ si può scrivere in infiniti modi come combinazione lineare di $\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\}$. In modo simile si dimostra che $\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}\in\mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}$. Le soluzioni del sistema lineare non omogeneo corrispondente

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a=4 \\ -a+b=-3 \end{cases}$$

sono infatti $a=2$, $b=-1$ e vale $\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. In questo caso, la scrittura è unica. I risultati trovati si spiegano cosí:

$$U=\mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\}=\mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

Nel primo caso i generatori di U non sono linearmente indipendenti e un elemento $u\in U$ si può esprimere in infiniti modi come loro combinazione lineare. Nel secondo caso, i generatori di U sono linearmente indipendenti, cioè una base, e un elemento $u\in U$ si può esperimere in modo unico come loro combinazione lineare (le coordinate rispetto ad una base fissata sono uniche).

7. Determinare due basi a piacere dello spazio delle matrici

$$M(2,2,\mathbf{R})=\{M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mid a,b,c,d\in\mathbf{R}\};$$

   che dimensione ha $M(2,2,\mathbf{R})$?

   Calcolare le coordinate della matrice $M=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}$ in ognuna delle basi scelte.

Soluzione. Una base di $M(2,2,\mathbf{R})$ è data da

$$\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\},$$

un'altra è data da

$$\{\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\}.$$

Le coordinate della matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ nella prima base, sono $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$: infatti

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, +5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate della matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ nella seconda base, sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -7/3 \\ 5 \end{pmatrix}$: infatti

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2/3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 7/3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Sia $U = \{M \in M(2,2,\mathbf{R}) \mid M^t = M\}$ il sottoinsieme delle matrici simmetriche 2×2 (qui M^t indica la trasposta di M).
   Determinare 4 elementi di U.
   Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $M(2,2,\mathbf{R})$.
   Determinare una base di U e calcolare la sua dimensione.
   Determinare le coordinate della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ nella base scelta.

Soluzione. Per definizione, la trasposta di una matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è data da $M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ e il sottoinsieme delle matrici simmetriche 2×2 è dato da $U = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\ a, b, d \in \mathbf{R}\}$. Quattro elementi di U sono ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

La somma di due matrici simmetriche è una matrice simmetrica e il prodotto di una matrice simmetrica per un numero reale qualunque è una matrice simmetrica:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}, \quad \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Dunque U è un sottospazio vettoriale di $M(2,2,\mathbf{R})$.

Una base di U è data da

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\};$$

queste matrici sono infatti linearmente indipendenti e generano U:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In particolare, $\dim U = 3$.

9. Sia $U = \{M \in M(2,2,\mathbf{R}) \mid M^t = -M\}$ il sottoinsieme delle matrici antisimmetriche 2×2 (qui M^t indica la trasposta di M).
   Determinare 4 elementi di U.
   Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $M(2,2,\mathbf{R})$.

Determinare una base di U e calcolare la sua dimensione.
Determinare le coordinate della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ nella base scelta.

Soluzione. il sottoinsieme delle matrici antisimmetriche 2×2 è dato da $U = \{M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbf{R}\}$. Quattro elementi di U sono ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

La somma di due matrici antisimmetriche è una matrice antisimmetrica e il prodotto di una matrice antisimmetrica per un numero reale qualunque è una matrice antisimmetrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b' \\ -b' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+b' \\ -(b+b') & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda b \\ -\lambda b & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque U è un sottospazio vettoriale di $M(2, 2, \mathbf{R})$.

Una base di U è data da $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$; in particolare, $\dim U = 1$. La coordinata della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ nella base scelta è uguale a 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$