1. Apostol: Sezione 1.15, Esercizi 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15.

2. Decidere se i seguenti insiemi di vettori sono indipendenti o meno.

(i)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^3;$$

(ii)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^5;$$

(iii)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^3;$$

(iv)

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^2.$$

Sol.
(i) I tre vettori dati non sono linearmente indipendenti: il terzo vettore è uguale all'opposto del secondo.
(ii)

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha+2\beta=0\\ -\alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha+\gamma=0\\ \alpha=0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Dunque i tre vettori dati sono linearmente indipendenti.
Alternativamente
Usiamo il metodo dell'eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&0\\-1&1&-1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\-1&1&-1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è 3 e dunque i tre vettori dati sono linearmente indipendenti.
(iii) Il vettore nullo O dipende linearmente da tutti gli altri. Dunque un insieme di vettori contenente il vettore nullo non può mai essere un insieme di vettori linearmente indipendenti.
(iv) Ogni vettore non nullo, preso da solo, costituisce un sistema di vettori linearmente indipendenti.

3. Siano u, v, w, p vettori linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^4$. Determinare quali delle seguenti terne di vettori sono linearmente indipendenti:

$$\{u, u+v, u+p\} \qquad \{u-w, w, 4w\} \qquad \{u+v, u+p, w+p\}.$$

Sol. Controlliamo se

$$\alpha u+\beta(u+v)+\gamma(u+p)=O \quad \text{è equivalente a} \quad \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Poiché u, v, p sono linearmente indipendenti,

$$\alpha u+\beta(u+v)+\gamma(u+p)=(\alpha+\beta+\gamma)u+\beta v+\gamma p=O \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Dunque $\{u, u+v, u+p\}$ sono linearmente indipendenti.
Con lo stesso procedimento si trova che i vettori $\{u-w, w, 4w\}$ sono linearmente dipendenti (ciò si deduce anche direttamente dal fatto che w e $4w$ sono uno multiplo dell'altro) e che $\{u+v, u+p, w+p\}$ sono linearmente indipendenti.

Alternativamente
Poiché u, v, w, p sono quattro vettori linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^4$, essi formano una base di $\mathbf{R}^4$. Possiamo dunque lavorare in coordinate rispetto a questa base. La prima terna diventa

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

Si vede facilmente (eliminazione gaussiana) che la matrice

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ha rango tre, e dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti.
Nella seconda terna si vede subito che il secondo e il terzo vettore sono linearmente dipendenti e non c'è bisogno di andare a lavorare in coordinate. Infine, la terza terna diventa

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

Si vede facilmente (eliminazione gaussiana) che la matrice

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

ha rango tre, e dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti.

4. Sia

$$U=\operatorname{span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\} \quad \text{in } \mathbf{R}^5.$$

(i) Determinare un insieme di generatori linearmente indipendenti di U;

(ii) Determinare se

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U.$$

Sol. (i) Anche in questo caso si tratta di applicare il metodo dell'eliminazione gaussiana. Lo applichiamo alla matrice che ha per righe i vettori dati

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le righe della matrice finale sono generatori linearmente indipendenti di U. Poiché con l'elim. di Gauss nessuna riga della matrice si è annullata, anche i tre vettori di partenza erano linearmente indipendenti.

(ii) Il vettore $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ apparterrà al sottospazio U se e solo se risulta linearmente dipendente dai generatori di U. Applicando l'eliminazione gaussiana alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente

(i) Anche in questo caso si tratta di applicare il metodo dell'eliminazione gaussiana. Lo applichiamo alla matrice che ha i vettori dati come colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque i tre generatori proposti sono linearmente indipendenti.

• ATTENZIONE: lo *span* delle colonne della matrice finale *NON È* uguale ad U.

(ii) Il vettore $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ apparterrà al sottospazio U se e solo se risulta linearmente dipendente dai generatori di U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango quattro, dunque u è linearmente indipendente dai generatori di U e pertanto non appartiene al sottospazio U.

5. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$

(i) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.

(ii) Determinare $\mathbf{v}_3 \in \mathbf{R}^3$ cosí che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ siano linearmente indipendenti.

(iii) Esprimere i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Sol. (i) Per mostrare che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono indipendenti usiamo, al solito, l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Si vede facilmente che $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è linearmente indipendente da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Cerchiamo α, β, γ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e troviamo $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 1/2$. Allo stesso modo troviamo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente
L'algoritmo di Gauss-Jordan può essere utilizzato anche per esprimere le coordinate dei vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ rispetto ad un altra base:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

da cui:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3\,;$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \frac{3}{2}\mathbf{v}_3\,;$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_3\,.$$