1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare e disegnare i seguenti vettori:

$$A + B, \quad A - B, \quad A + B + C, \quad 2A + B - 3C, \quad tA + (1 - t)B,\ t \in [0, 1], \quad A + tC,\ t \in [0, 1].$$

Sol.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A + B + C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 2A + B - 3C = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$tA + (1 - t)B,\ t \in [0, 1]$ è il segmento congiungente A e B;
$A + tC,\ t \in [0, 1]$ è il segmento congiungente A e $A + C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare e disegnare i seguenti vettori:

$$A + B, \quad A - C, \quad A + B + C, \quad 2A + B - 3C, \quad tA + (1 - t)B,\ t \in [0, 1], \quad A + tD,\ t \in [0, 1].$$

Sol.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A - C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A + B + C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 2A + B - 3C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$tA + (1 - t)B,\ t \in [0, 1]$ è il segmento congiungente A e B;
$A + tD,\ t \in [0, 1]$ è il segmento congiungente A e $A + D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2\} \qquad B = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2\};$$

$$C = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0\} \qquad D = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - 3x_2 = 1\};$$

(ii) Dati $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$X \in A, \quad 2X \in A, \quad O \in A, \quad X \in B, \quad 3X \in B, \quad O \in B, \quad X \in D,$$

$$Y \in D, \quad O \in D, \quad 2Y \in D, \quad -Y \in D, \quad X \in C, \quad Y \in C, \quad X + Y \in C, \quad -X \in C$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in A, \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in C.$$

(iii) Decidere se A, B, C, D sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^2$.

Sol. (i) A è la retta passante per l'origine e per il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
B è la retta verticale passante per il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;
C è il semipiano delle x_1 positive (a destra dell'asse delle x_2);
D è la retta passante per i punti $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(ii) Vera; vera; vera; vera; falsa; falsa; falsa; vera; falsa; falsa; falsa; vera; vera; vera; falsa; vera; falsa.
(iii) A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$: Siano $a_1 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ e $a_2 = \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix}$ due elementi generici di A (cioè con la prima coordinata uguale e due volte la seconda). Si ha infatti che

$$a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(t+s) \\ (t+s) \end{pmatrix} \in A, \quad \lambda a_1 = \lambda \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda t \\ \lambda t \end{pmatrix} \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

B, C e D non lo sono (una buona ragione è, ad esempio, che nessuno tra B, C e D contiene il vettore nullo $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.)

5. Apostol, Sezione 1.4, pag. 21-22: Esercizi 1,2,3,4,5,6,7,8.

6. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$

$$U = \{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : 0 < t < 1 \}, \quad V = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \quad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \geq 0 \}.$$

(ii) Dati $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$O \in U, \quad O \in V, \quad O \in W, \quad Y \in U, \quad \frac{1}{3} Y \in U, \quad 2Y \in V$$

$$X \in W, \quad Y \in W, \quad X + Y \in W, \quad -X \in W, \quad X - Y \in W$$

(iii) Decidere se U, V, W sono o meno sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$.

Sol. (i) U è il segmento congiungente l'origine con $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, estremi esclusi. V è l'origine, W è il semispazio superiore, ossia la parte di spazio che sta sopra il piano orizzontale e il piano orizzontale stesso.
(ii) Falsa; vera; vera; falsa; falsa; falsa; vera; vera; vera; falsa; falsa.
(iii) V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ (il sottospazio banale); U e W non lo sono (ad esempio, U non contiene il vettore nullo O, mentre W se contiene un vettore X non contiene il suo opposto $-X$).